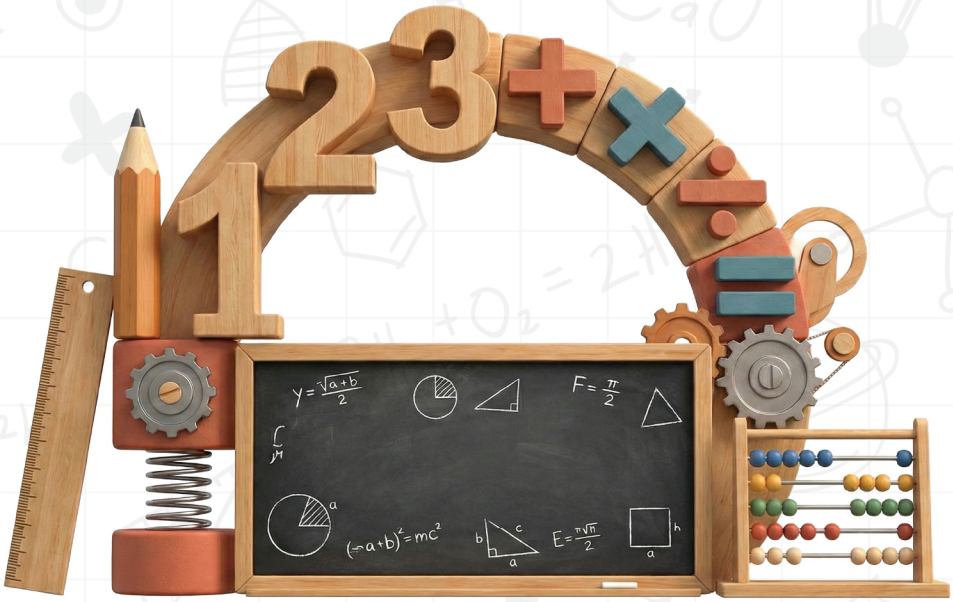
# جزوه تست و جمع بندی

## نـــوروز ۱۴۰۵

# ریاضی (تجربی) پایه



**به همراه پاسخنامه تشریحی**

نام و نام خانوادگی

خیلی سبز! ماراتون
قلم‌چی




www.SanjeshCloud.ir

www.BLE.ir/SanjeshCloud

# فهرست آزمون های ریاضیات

## قلم‌چی

### ریاضیات

| تاریخ | مبحث | تعداد تست | صفحه سوال | صفحه پاسخ |
|---|---|---|---|---|
| ۱۸ مهر | معادله و نامعادله،تعیین علامت<br>آمار | ۱۰ | ۱<br>۳ | ۸۹<br>۹۰ |
| ۲ آبان | تابع و معادله درجه۲<br>هندسه تحلیلی و پایه | ۱۰ | ۵<br>۷ | ۹۳<br>۹۴ |
| ۱۶ آبان | توان های گویا و عبارت های جبری<br>هندسه پایه | ۱۰ | ۹<br>۱۱ | ۹۷<br>۹۸ |
| ۳۰ آبان | توابع نمایی و لگاریتمی<br>شمارش بدون شمردن | ۱۰ | ۱۳<br>۱۵ | ۱۰۰<br>۱۰۱ |
| ۱۴ آذر | مجموعه، الگو و دنباله<br>احتمال پایه | ۱۰ | ۱۷<br>۱۹ | ۱۰۳<br>۱۰۴ |
| ۲۸ آذر | آمار<br>معادله و نامعادله و تعیین علامت | ۱۰ | ۲۱<br>۲۳ | ۱۰۷<br>۱۰۸ |
| ۱۰ بهمن | هندسه تحلیلی و پایه<br>تابع و معادله درجه۲ | ۱۰ | ۲۵<br>۲۷ | ۱۱۱<br>۱۱۳ |
| ۲۴ بهمن | هندسه پایه<br>توان های گویا و عبارت های جبری | ۱۰ | ۲۹<br>۳۱ | ۱۱۶<br>۱۱۸ |
| ۱۰ اسفند | هندسه تحلیلی | ۱۰ | ۳۳ | ۱۲۰ |
| ۲۴ اسفند | هندسه پایه | ۱۰ | ۳۵ | ۱۲۲ |

## خیلی سبز

### ریاضیات

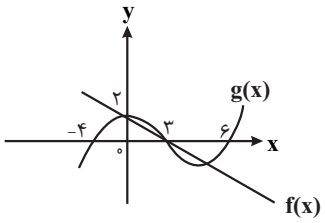
| تاریخ | مبحث | تعداد تست | صفحه سوال | صفحه پاسخ |
|---|---|---|---|---|
| ۲۵ مهر | معادله،نامعادله،درجه۲ | ۲۰ | ۳۷ | ۱۲۴ |
| ۲۸ آذر | توان و عبارت های جبری | ۱۴ | ۳۹ | ۱۴۸ |
| ۱۰ بهمن | توابع نمایی،لگاریتمی،هندسه تحلیلی،الگو و دنباله | ۱۳ | ۴۱ | ۱۶۲ |
| ۲۴ بهمن | آمار | ۱۱ | ۴۳ | ۱۷۶ |
| ۱۰ اسفند | هندسه تحلیلی و پایه | ۱۰ | ۴۵ | ۱۸۷ |
| ۲۴ اسفند | احتمال پایه، شمارش و مجموعه ها | ۱۱ | ۴۷ | ۱۹۸ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| مـــاز | ریـــاضـــیـــات | | | | |
| | ۱۷ مهر | معادله و نامعادله | ۱۰ | ۴۹ | ۲۰۹ |
| | ۱ آبان | تابع و معادله درجه۲ | ۸ | ۵۱ | ۲۱۶ |
| | ۱۵ آبان | توان و عبارت های جبری | ۵ | ۵۳ | ۲۲۱ |
| | ۲۹ آبان | توابع نمایی و لگاریتمی | ۱۳ | ۵۴ | ۲۲۴ |
| | ۱۳ آذر | مجموعه و الگو و دنباله | ۹ | ۵۶ | ۲۳۳ |
| | ۲۷ آذر | آمار | ۷ | ۵۷ | ۲۳۷ |
| | ۹ بهمن | هندسه تحلیلی | ۲۰ | ۵۸ | ۲۴۳ |
| | ۲۳ بهمن | هندسه پایه | ۱۳ | ۶۱ | ۲۵۶ |
| ماراتون | ریـــاضـــیـــات | | | | |
| | ۱۷ مهر | معادله و نامعادله | ۱۰ | ۶۴ | ۲۶۵ |
| | ۱ آبان | معادله و تابع درجه۲ | ۱۰ | ۶۵ | ۲۷۲ |
| | ۱۵ آبان | توان و عبارت های جبری | ۱۰ | ۶۶ | ۲۷۸ |
| | ۲۹ آبان | توابع نمایی و لگاریتمی | ۱۰ | ۶۷ | ۲۸۱ |
| | ۱۳ آذر | مجموعه، الگو و دنباله | ۱۰ | ۶۸ | ۲۸۶ |
| | ۲۷ آذر | آمار | ۱۰ | ۶۹ | ۲۹۱ |
| | ۱۶ بهمن | هندسه تحلیلی | ۱۰ | ۷۰ | ۲۹۶ |
| | ۲۴ بهمن | شمارش بدون شمردن | ۱۰ | ۷۱ | ۳۰۱ |
| | ۸ اسفند | هندسه تحلیلی | ۱۰ | ۷۲ | ۳۰۵ |
| | ۲۲ اسفند | هندسه پایه | ۱۰ | ۷۴ | ۳۱۰ |
| گروه آموزشی ماز دوپـــینـــگ | ریـــاضـــیـــات | | | | |
| | شماره۱ | معادله نامعادله، درجه۲ | ۲۰ | ۷۷ | ۳۱۶ |
| | شماره۲ | تابع، توابع نمایی و لگاریتمی | ۲۵ | ۸۰ | ۳۲۷ |
| | شماره۳ | فصل ۱ و ۳ دهم<br>فصل ۱ و ۲ یازدهم | ۱۳ | ۸۴ | ۳۳۸ |
| | شماره۴ | شمارش بدون شمردن، آمار و احتمال | ۲۰ | ۸۶ | ۳۴۲ |

آزمون ۱۸ مهرماه ریاضی پایه

**معادله نامعادله و تعیین علامت: ریاضی۱ +ریاضی۲**

۱- با توجه به نمودار زیر، مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ کدام است؟




۱) $[3,6]$

۲) $(-4,3)-\{0\}$

۳) $[-4,6]$

۴) $(-4,6)-\{3\}$

۲- مجموع جواب‌های صحیح نامعادلهٔ $(|x-2|+1)^2 - 6|x-2| < -2$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۸

۴) ۱۲

۳- نمودار سهمی به معادلهٔ $f(x)=\frac{1}{a}x^2+abx+a^3$ همواره پایین محور $x$ هاست. مجموعهٔ مقادیر طبیعی ممکن برای $b$ چند عضو دارد؟

۱) ۷

۲) ۱

۳) ۳

۴) ۴

۴- شخصی مسیر ۳۵ کیلومتری بین دو شهر را طی کرده و دوباره به شهر مبدأ باز می‌گردد. اگر سرعت متوسط او در مسیر رفت ۶ کیلومتر بر ساعت بیشتر از سرعت متوسط در مسیر برگشت باشد و مجموع زمان رفت و برگشت او برابر با ۴ ساعت باشد، سرعت او در مسیر برگشت چند کیلومتر بر ساعت بوده است؟

۱) ۱۵

۲) ۱۸

۳) ۲۱

۴) ۲۴

۵- اگر بزرگترین مجموعهٔ جواب ممکن برای نامعادلهٔ $x^3-3x^2+3x > x^2$ به صورت $(a,b)\cup(3,+\infty)$ باشد، آنگاه میانگین $a$ و $b$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵

۲) ۰/۵

۳) ۰/۷۵

۴) ۱/۵

۶- تعداد جواب‌های معادلهٔ $\frac{1}{2+\sqrt{x+4}}-\frac{1}{2-\sqrt{x+4}}=2\sqrt{(x+4)^3}$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۷- جدول تعیین علامت عبارت $p(x)=(x-۱)(ax^۲-۸x+۴a)$ به صورت زیر می‌باشد. مقدار $a.b$ کدام است؟

| $x$ | | $۱$ | | $b$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | $-$ | ۰ | $+$ | ۰ | $+$ | |

۱) ۸

۲) -۸

۳) ۴

۴) -۴

۸- معادلهٔ $\sqrt{x-۶}=\sqrt{۴-\sqrt{۷-x}}$ چند ریشهٔ طبیعی دارد؟

۱) ۳

۲) ۲

۳) ۱

۴) صفر

۹- اگر معادلهٔ $\frac{k}{x^۲-۴x}-\frac{k}{x^۲+۴x}=\frac{x}{x^۲-۱۶}$ هیچ جوابی نداشته باشد، اختلاف مقادیر نامثبت ممکن برای $k$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۲

۱۰- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{۳x}{۵x^۲-۱۰x+۶}+\frac{۴x}{۵x^۲-۸x+۶}=۱$ کدام است؟

۱) ۲/۶

۲) ۲/۸

۳) ۳

۴) ۳/۲

**۱- متغیرهای میزان بارندگی برحسب سانتی‌متر، نوع بارندگی (باران، برف و تگرگ) و شدت بارندگی (زیاد، متوسط و کم) به ترتیب از راست به چپ از کدام نوع هستند؟**

۱) کمّی گسسته- کیفی اسمی- کیفی ترتیبی

۲) کمّی پیوسته- کیفی ترتیبی- کیفی اسمی

۳) کمّی گسسته- کیفی ترتیبی- کیفی اسمی

۴) کمّی پیوسته- کیفی اسمی- کیفی ترتیبی

**۲- مجموع داده‌های $x_{۱۰}$ , ... , $x_۲$ , $x_۱$ برابر ۱۲۰ می‌باشد. اگر ضریب تغییرات داده‌های مذکور، $\frac{۴}{۳}$ ضریب تغییرات داده‌های $kx_۱+\frac{۱}{k},kx_۲+\frac{۱}{k},...,kx_{۱۰}+\frac{۱}{k}$ باشد، مقدار $k$ کدام است؟ $(k>۰)$**

۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) ۲

**۳- اگر حقوق کارمندان شرکتی ٪۲۵ کاهش یابد، ضریب تغییرات حقوق تمام کارمندان شرکت چه تغییری می‌کند؟**

۱) ٪۷۵ کاهش می‌یابد.

۲) ٪۵۰ کاهش می‌یابد.

۳) ٪۲۵ کاهش می‌یابد.

۴) تغییر نمی‌کند.

**۴- دانش‌آموزی در محاسبهٔ میانگین اعداد ۱۲، ۱۶، $a$ ، ۷ و ۳، به اشتباه عدد $a$ را دو بار می‌نویسد و به این ترتیب مقدار میانگین ۱ واحد کمتر از مقدار واقعی آن به دست می‌آید. مقدار واقعی میانگین کدام است؟**

۱) ۷

۲) ۷/۲

۳) ۷/۵

۴) ۸

**۵- واریانس داده‌های $x_۱$ ، $x_۲$ ، $x_۳$ ، $x_۴$ برابر صفر است. اگر میانگین داده‌های $x_۱+۱$ ، $x_۱+x_۲+۲$ ، $x_۱+x_۲+x_۳+۳$ و $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+۴$ برابر ۱۰ باشد، واریانس این داده‌ها کدام است؟**

۱) ۲۰

۲) ۲۵

۳) ۳۰

۴) ۴۰

۶- داده‌های $x_1$ ، $x_2$ ، ... ، $x_n$ با میانگین ۴ و ضریب تغییرات $\frac{۱}{۲}$ مفروض هستند. اگر سه دادهٔ برابر با میانگین، به این داده‌ها اضافه کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ خواهد شد. تعداد داده‌های اولیه کدام است؟

۱) ۷

۲) ۹

۳) ۱۲

۴) ۱۳

۷- در داده‌های آماری ۱۰،۱،۷ −، ۱۰،۱۳،۶،۰،۱ −، ۷،۷،۱۳،۱۰و ۴- اختلاف میانهٔ داده‌های بزرگ از چارک سوم و واریانس داده‌های کوچک‌تر از چارک اول کدام است؟

۱) ۹

۲) ۱۰

۳) ۷

۴) ۸

۸- اگر به یک نمونه از داده‌ها با میانگین $\bar{x}$ ، ۳ دادهٔ مساوی $\bar{x}$ اضافه شود، واریانس داده‌ها برابر با ۲۷ می‌شود و اگر ۳ دادهٔ مساوی $\bar{x}$ از نمونهٔ اولیه حذف شود، واریانس داده‌ها برابر با ۴۵ می‌شود. واریانس داده‌های نمونهٔ اولیه چقدر است؟

۱) ۳۳/۲۵

۲) ۳۳/۵

۳) ۳۳/۷۵

۴) ۳۴

۹- در ۱۲ دادهٔ آماری، مجموع تفاضل داده‌ها از عدد ۶، برابر صفر است. اگر تمام این داده‌ها را ۲ برابر کنیم، واریانس داده‌های جدید برابر ۱۶ می‌شود. ضریب تغییرات داده‌های اولیه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{۲}{۹}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۰- اگر واریانس داده‌های $۳a+۱$ ، $a+۱$ ، ۵ و ۱، برابر ۵ باشد، میانگین این داده‌ها کدام است؟ $(a>۰)$

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

**تابع و معادله درجه ۲ : ریاضی۱ + ریاضی۲**

۱- به ازای چند مقدار صحیح $m$، معادلهٔ درجه دوم $mx^۲-(m-۲)x+۱=۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد؟

۱) ۵

۲) ۶

۳) ۷

۴) ۸

۲- ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $(\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱})x=x^۲+\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) $-۱$

۲) $-\sqrt{۲}$

۳) ۱

۴) $\sqrt{۲}$

۳- معادلهٔ درجهٔ دوم $\frac{x^۲}{۲}-۴x-۱=۰$ را به کمک روش مربع کامل حل کرده‌ایم و به معادله $\frac{۱}{۲}(x-\alpha)^۲=\beta$ رسیده‌ایم. مقدار $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۱۰

۲) ۱۱

۳) ۱۲

۴) ۱۳

۴- معادلهٔ درجه دوم $(m-۲)x^۲-۲(m-۲)x+۱=۰$ دارای ریشهٔ مضاعف است، در این‌صورت معادلهٔ $mx-(m+۱)\sqrt{x}-۴=۰$ چند جواب دارد؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۵- معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌هایش از ۳ برابر ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۳x+۱=۰$ یک واحد کمتر باشند، کدام است؟

۱) $x^۲+۱۱x+۱۹=۰$

۲) $x^۲-۱۱x+۱۹=۰$

۳) $x^۲+۱۱x-۱۹=۰$

۴) $x^۲-۱۱x-۱۹=۰$

۶- اگر $a$ و $b$ صفرهای سهمی به معادله $y=۹bx^۲+۶x+a$ باشند ، آن‌گاه عرض از مبدأ این سهمی کدام است؟ ( $a<b$ )

۱) صفر

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $-\frac{۷}{۳}$

۴) $\frac{۷}{۳}$

۷- اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^۲+۳x-۵=۰$ باشند، مقدار $\frac{۲۵\alpha+\beta^۵}{۶\beta^۲}$ کدام است؟

۱) ۱۲

۲) ۱۸

۳) -۱۲

۴) -۱۸

۸- اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+x-m=۰$ باشند، به طوری که $\alpha<۲<\beta$ باشد، به جای $m$ چه اعدادی می‌توان قرار داد؟

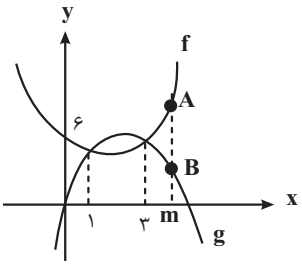
۱) $m>۶$

۲) $m<۶$

۳) $m<-\frac{۱}{۴}$

۴) $-\frac{۱}{۴}<m<۶$

۹- در شکل زیر نمودار دو تابع درجهٔ دوم $f$ و $g$ رسم شده است، به ازای کدام مقدار $m$ طول پاره‌خط قائم $AB$ برابر ۲/۵ است؟




۱) $\frac{۷}{۲}$

۲) $\frac{۱۰}{۳}$

۳) $\frac{۱۳}{۴}$

۴) $\frac{۱۶}{۵}$

۱۰- معادلهٔ $(x+۱)(x+۲)(x+۳)(x+۶)=mx^۲$ به ازای دو مقدار $m$ دارای سه ریشه است. جذر حاصل ضرب این دو مقدار کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

۱- فرض کنید سه نقطهٔ $A(۰,۳)$ ، $B(۳,۰)$ و $C(۴,۳)$ مختصات رئوس مثلث $ABC$ باشند، اگر $CH$ ارتفاع وارد بر ضلع $AB$ و $CM$ میانهٔ وارد بر ضلع $AB$ در این مثلث باشد، طول $MH$ کدام است؟

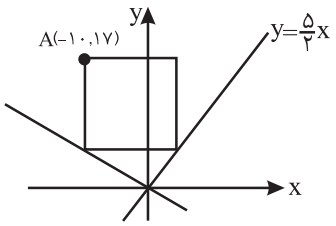
۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۲- در شکل زیر، مختصات یکی از رئوس مربع داده شده است. اگر اضلاع مربع موازی محورهای مختصات باشند، مختصات مرکز مربع کدام است؟



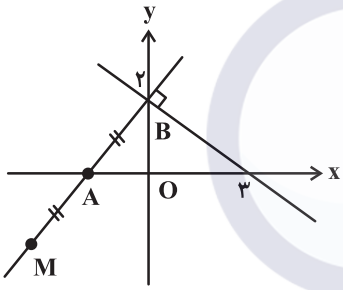

۱) $(-۱,۱۲)$

۲) $(-۲,۱۲/۵)$

۳) $(-۳,۱۳/۵)$

۴) $(-۴,۱۱)$

۳- در شکل زیر فاصلهٔ نقطهٔ $M$ تا مبدأ مختصات کدام است؟ $(MA = AB)$




۱) $\frac{۵}{۳}$

۲) $\frac{۱۰}{۳}$

۳) $\frac{۵}{۴}$

۴) $\frac{۷}{۳}$

۴- اگر $A(۳,۰)$ و $B(۷,-۲)$ رئوس مجاور یک متوازی‌الاضلاع و خط به معادلهٔ $y = -۲x - ۷$ معادلهٔ یک ضلع آن باشد، مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۵- سه ضلع مثلثی به معادلات $AB : ۲y + x = ۲$ ، $AC : ۲y - ۳x = ۶$ و $BC : ۳y + x = -۳$ هستند. اگر ارتفاع وارد بر $BC$ را امتداد دهیم، نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم را با کدام عرض قطع خواهد کرد؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $-\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۸}$ ۴) $-\frac{۹}{۸}$

۶- چند متوازی‌الاضلاع با یک ضلع به طول ۵ می‌توان رسم کرد که طول قطرهای آن عددی صحیح و مجموع طول قطرها برابر ۱۸ باشد؟

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۹

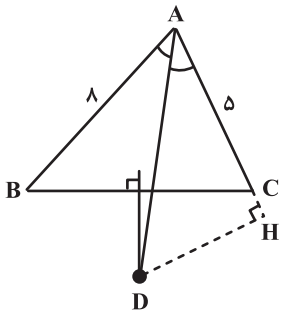
۷- در مثلث $ABC$ ، زوایای $\hat{B} = ۷۰^\circ$ و $\hat{C} = ۷۴^\circ$ مفروض‌اند. عمودمنصف اضلاع مثلث $ABC$ در نقطهٔ $M$ یکدیگر را قطع می‌کنند. اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{M}B$ چند درجه است؟

۱) $۱۴۴^\circ$ ۲) $۱۴۶^\circ$ ۳) $۱۴۸^\circ$ ۴) $۱۵۰^\circ$

**۸- مجموعه نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ M واقع در همان صفحه بین یک تا چهار واحد است، تشکیل یک شکل هندسی می‌دهند. مساحت این شکل کدام است؟**

۱) $۳۰\pi$ ۲) $۱۵\pi$ ۳) $۸\pi$ ۴) $۴\pi$

**۹- در مثلث زیر، D نقطهٔ تقاطع نیمساز داخلی زاویهٔ A و عمودمنصف ضلع BC است. اگر $AB = ۸$ و $AC = ۵$ باشند و اگر DH ارتفاع وارد بر امتداد ضلع AC باشد، اندازهٔ CH چقدر است؟**




۱) ۰/۷۵
۲) ۱/۵
۳) ۱
۴) ۲

**۱۰- چند مثلث متمایز ABC با اطلاعات $AB = ۱۰$ ، $AC = ۱۷$ و ارتفاع $AH = ۸$ می‌توان رسم کرد؟**

۱) یک ۲) دو ۳) چهار ۴) صفر

**توان‌های گویا و عبارت‌های جبری : ریاضی۱**

**۱- اگر $a+۱$ و $-۲a+۱$ ریشه‌های $n$ام عدد ۸۱ باشند، مقدار $a+n$ کدام است؟**

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۶

۴) ۷

**۲- اگر $\sqrt[۳]{x} < x$ و $x^۴ < x^۵$ باشد، کدام عدد می‌تواند به جای $x$ قرار بگیرد؟**

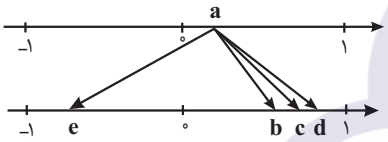
۱) $-\sqrt{۲}$

۲) $۰/۵$

۳) $-۰/۵$

۴) $\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۲}}$

**۳- نقطهٔ $a$ از بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. کدام گزینه صحیح است؟**




۱) $d=\sqrt[۳]{a}$

۲) $c=\sqrt[۵]{a}$

۳) $b=\sqrt[۵]{a}$

۴) $e=-\sqrt[۴]{a}$

**۴- اگر $\sqrt[۳]{a}=b-۱۷$ و $\sqrt[۳]{-b}=-۳$ باشد، حاصل $\sqrt[۳]{ab}$ کدام است؟**

۱) ۳۰

۲) ۳

۳) ۱۰

۴) ۱۳

**۵- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۵\sqrt[۳]{۱۵\sqrt{۱۳۵}}}}{\sqrt[۹۶]{\frac{۱}{۱۲۵}\sqrt{\sqrt{۲۴۳}}}}$ کدام است؟**

۱) $۳\sqrt{۵}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$

۳) $\frac{۳}{۵}$

۴) $\frac{۵}{۳}$

۶- اگر $\sqrt[۳]{a} > a$ و $a^۲ + \frac{۱}{a^۲} = ۱۱$ باشد، حاصل عبارت $a^۳ - \frac{۱}{a^۳}$ کدام است؟ $(a > ۰)$

۱) ۲۴

۲) -۲۴

۳) ۳۶

۴) -۳۶

۷- حاصل عبارت $\frac{x^۵ - ۱۰x^۳ + ۹x}{(x^۲ - ۲x - ۳)(x^۲ + ۲x - ۳)}$ به ازای $x = \sqrt{۵} + ۱$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\sqrt{۵}$

۲) ۴

۳) $۱ + \sqrt{۵}$

۴) ۶

۸- حاصل کسر $\frac{۱۲۸^{-\frac{۱}{۷}} + ۹^{-\frac{۱}{۲}}}{۶۴^{\frac{۱}{۱۲}} + ۱}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۵\sqrt{۲} - ۱}{۶}$

۲) $\frac{۵\sqrt{۲} - ۵}{۶}$

۳) $\frac{۶ + ۶\sqrt[۶]{۸}}{۵}$

۴) $\frac{۵\sqrt[۶]{۸} + ۵}{۶}$

۹- حاصل عبارت $(\sqrt{۲ + \sqrt{۳}} - \sqrt{۲ - \sqrt{۳}})(۱ + \sqrt{۱۲})(\sqrt{۴ - \sqrt{۱۲}})$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$

۲) $\sqrt{۶}$

۳) $-\sqrt{۶}$

۴) $-۲\sqrt{۶}$

۱۰- اگر $\sqrt[۳]{\frac{۲۳ - \sqrt{۵۱۳}}{۴}} + \sqrt[۳]{\frac{۲۳ + \sqrt{۵۱۳}}{۴}} = ۳x + ۱$، حاصل $x\sqrt{۲x + ۲}$ کدام است؟

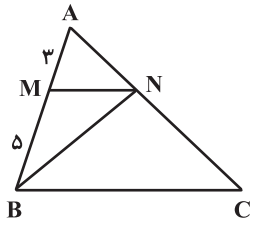
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۰/۵

۴) ۱/۵

۱- در مثلث ABC، پاره‌خط MN موازی ضلع BC رسم شده است. مساحت مثلث AMN چه کسری از مساحت مثلث BNC است؟



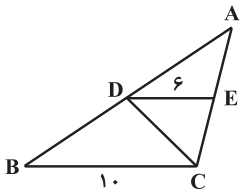

۱) $\frac{۹}{۴۰}$

۲) $\frac{۳}{۸}$

۳) $\frac{۹}{۲۵}$

۴) $\frac{۹}{۶۴}$

۲- در مثلث زیر، پاره‌خط $DE = ۶$ موازی ضلع $BC = ۱۰$ است. اگر خط رسم شده از رأس B به موازات DC، امتداد ضلع AC را در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۹ واحد از رأس C قطع کند، طول ضلع AC کدام است؟




۱) ۱۲/۵

۲) ۱۰

۳) ۱۲

۴) ۱۳/۵

۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، اگر فاصلهٔ نقطهٔ M (وسط ضلع AB) از ضلع BC برابر ۶ و از رأس B برابر ۱۰ باشد، آن‌گاه فاصلهٔ نقطهٔ M از رأس C کدام است؟

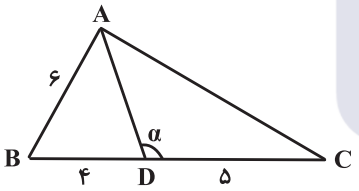
۱) ۱۵

۲) ۱۷

۳) $۱۲\sqrt{۲}$

۴) $۵\sqrt{۱۳}$

۴- در مثلث زیر، اندازهٔ زاویهٔ $\alpha$ کدام است؟



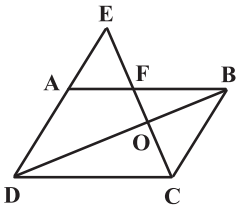

۱) $B\hat{A}C + \hat{C}$

۲) $\hat{B} + \hat{C}$

۳) $۹۰^\circ + \frac{B\hat{A}C}{۲}$

۴) $۱۸۰^\circ - \frac{B\hat{A}C}{۲}$

۵- در متوازی‌الاضلاع ABCD، امتداد DA و CO یکدیگر را در نقطهٔ E قطع کرده‌اند. اگر $CO = ۲OF = ۴$ باشد، اندازهٔ EF کدام است؟




۱) ۶

۲) ۸

۳) ۴

۴) ۱۲

۶- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، $AB = ۶$ و $AC = ۲$ است. اگر H پای ارتفاع وارد بر وتر باشد، آن‌گاه مجموع فواصل نقطهٔ H از دو ضلع قائمهٔ مثلث ABC کدام است؟

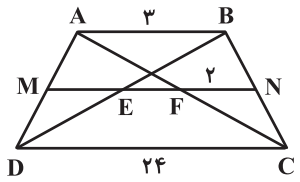
۱) ۲

۲) ۲/۴

۳) ۲/۵

۴) ۳

۷- در ذوزنقهٔ زیر MN موازی قاعده‌ها است. طول پاره‌خط EF کدام است؟



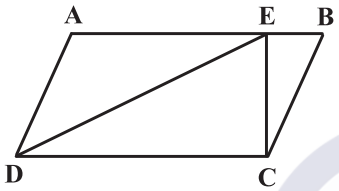

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴/۵

۴) ۶

۸- نقطهٔ E روی ضلع متوازی‌الاضلاع طوری انتخاب شده است که $AB = ۵EB$. مساحت مثلث EBC چند درصد مساحت مثلث ADE است؟



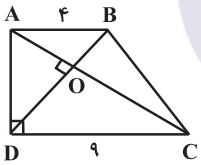

۱) ۴۰

۲) ۳۰

۳) ۲۵

۴) ۲۰

۹- اگر در ذوزنقه قائم‌الزاویهٔ شکل زیر، قطرها بر هم عمود باشند، مساحت مثلث OAB کدام است؟



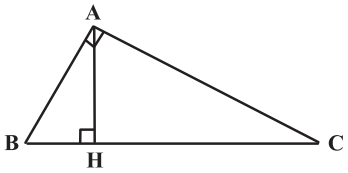

۱) $\frac{۲۴}{۵}$

۲) $\frac{۴۸}{۱۳}$

۳) $\frac{۱۲}{۵}$

۴) $\frac{۳۶}{۱۳}$

۱۰- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به نسبت ۱ به k تقسیم می‌کند. نسبت دو ضلع قائمهٔ این مثلث برابر با کدام است؟




۱) $\frac{۱}{\sqrt{k}}$

۲) $\frac{۱}{k}$

۳) $\frac{۱}{k+۱}$

۴) $\frac{۱}{k^۲}$

**توابع نمایی و لگاریتمی: ریاضی۲**

۱- اگر $a = ۴^{۱-x}$ ، $b = ۲^{x+۱}$ و $\frac{a}{b} = \frac{۱}{۴}$ باشد، مقدار $a^۲ + b^۲$ کدام است؟

۱) ۱۰

۲) ۵

۳) ۲۵

۴) ۱۷

۲- کدام گزینه، جواب معادلهٔ $\log_۳ \sqrt[۳]{x} = \sqrt{\log_۳ x} + \frac{۴}{۳}$ است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $۳^{۱۶}$

۳) ۱۶

۴) $\frac{۳}{۴}$

۳- اگر $۵^x = ۶^{۱-x}$ باشد، $x$ کدام است؟

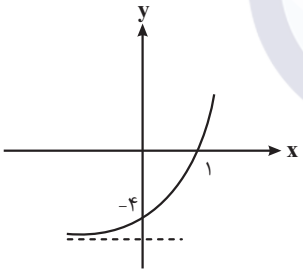
۱) $\log_۶ ۵$

۲) $\log_۵ ۶$

۳) $\log_۶ ۳۰$

۴) $\log_{۳۰} ۶$

۴- اگر نمودار تابع نمایی $f(x) = -۸ + (\frac{۱}{۲})^{ax+b}$ به صورت زیر باشد، مقدار $f(-۱)$ کدام است؟




۱) ۱۲-

۲) ۶-

۳) ۷-

۴) ۸-

۵- اگر $۹^a = ۳\sqrt{۳}$ باشد، آنگاه حاصل لگاریتم $(۳ + ۸a)$ در پایه ۳ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۹

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) ۳

۶- معادله $۲^{۵x} = x^{۱۰}$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) هیچ

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۷- در یک منطقه دو زلزله با فاصلهٔ زمانی رخ داده است و شدت زلزلهٔ دوم، ۱/۲ ریشتر بیشتر از شدت زلزلهٔ اول است. زلزلهٔ دوم چند برابر زلزلهٔ اول انرژی آزاد کرده است؟ ($E$ انرژی آزادشده و $M$ شدت زلزله است: $\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$)

۱) $۱۰^{۱/۸}$

۲) $۱۰^{۱/۲}$

۳) $۱۰^{۱/۵}$

۴) $۱۰^{۲}$

۸- اگر $\log_{۲}۳ = x$ و $\log_{۳}۵ = y$ باشد، حاصل $\log_{۲۴}۹۰$ کدام است؟

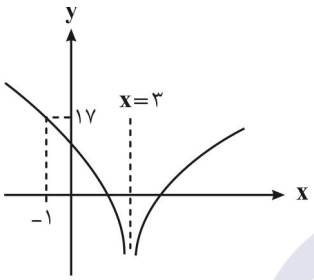
۱) $\frac{۲x+xy+۱}{x+۱}$

۲) $\frac{۴x+xy+۱}{۳x+۱}$

۳) $\frac{x+xy+۲}{۳x+۱}$

۴) $\frac{۲x+xy+۱}{x+۳}$

۹- اگر نمودار تابع $f(x) = (۳\log_b |۲x-a|) - ۱$ به صورت زیر باشد، حاصل $\frac{a}{b^{۲}}$ کدام است؟




۱) ۳

۲) ۴

۳) ۲

۴) ۱

۱۰- اگر $a$ جواب معادلهٔ $\left(\frac{۶}{\sqrt{۱۳}-۱}\right)^{x} + \left(\frac{۲۷}{\sqrt{۵۲}-۵}\right)^{x} = ۳۰$ باشد و $\frac{\log ۳}{a} + \log ۲ = \log \beta$، حاصل $[\beta]$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

**۱- در یک فروشگاه، هفت نوع خشکبار مختلف فروخته می‌شود. اگر در یک آجیل حداقل چهار نوع از این خشکبارها استفاده شود، چند نوع آجیل مختلف در این فروشگاه می‌توان درست کرد؟**

۱) ۳۵

۲) ۵۶

۳) ۶۳

۴) ۶۴

**۲- چند زیرمجموعه از مجموعهٔ {۱۲ , ... , ۳ , ۲ , ۱} وجود دارد به‌طوری که حاصل‌ضرب بزرگ‌ترین عضو در کوچک‌ترین عضو آن برابر ۱۲ باشد؟**

۱) ۱۰۲۴

۲) ۱۰۳۳

۳) ۲۰۴۸

۴) ۲۰۴۹

**۳- ۴ نفر در یک مسابقهٔ استعدادیابی با حضور ۳ داور شرکت می‌کنند، طوری که در پایان مسابقه، هر داور، مستقل از بقیه، یک نفر را به عنوان برنده انتخاب می‌کند. فردی برندهٔ مطلق مسابقه است که حداقل دو داور او را به عنوان برنده انتخاب کنند. این مسابقه، در چند حالت برندهٔ مطلق دارد؟**

۱) ۲۰

۲) ۲۴

۳) ۳۲

۴) ۴۰

**۴- چند عدد طبیعی چهار رقمی زوج وجود دارد که در آن‌ها ارقام ۷ و ۵ به کار نرفته باشد؟**

۱) ۲۲۰۰

۲) ۲۲۴۰

۳) ۲۴۰۰

۴) ۲۴۵۰

**۵- چند عدد ده رقمی با استفاده از ارقام ۲، ۴، ۵ و ۷ می‌توان نوشت، به‌طوری که مجموع هر سه رقم متوالی آن زوج باشد؟**

۱) $۲^{۱۰}$

۲) $۲^{۱۲}$

۳) $۳\times۲^{۱۰}$

۴) $۳\times۲^{۱۲}$

**۶- با مجموعه ارقام {۸ , ۷ , ۶ , ۴ , ۲ , ۰} ، چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز می‌توان ساخت که از ۲۴۰۰ بزرگ‌تر باشد؟**

۱) ۲۱۶

۲) ۲۵۲

۳) ۲۷۶

۴) ۲۸۸

**۷- از هر یک از شهرهای تهران، اصفهان، مشهد، شیراز و تبریز، ۵ نفر در یک دوره مسابقات شرکت کرده‌اند. به چند طریق می‌توانیم ۴ نفر انتخاب کنیم که به ۳ شهر مختلف تعلق داشته باشند؟**

۱) ۲۵۰۰

۲) ۵۰۰۰

۳) ۷۵۰۰

۴) ۱۰۰۰۰

**۸- با ارقام ۴ , ۴ , ۴ , ۳ , ۳ , ۳ , ۱ , ۱ , ۱ چند عدد چهاررقمی زوج می‌توان نوشت؟**

۱) ۱۸

۲) ۲۴

۳) ۲۶

۴) ۲۸

**۹- یک آشپز ۱۰ نوع ادویه دارد. او با هر ۳ نوع از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. ادویه‌ای وجود دارد که اگر انتخاب شود، یکی از ادویه‌های دیگر باید برای ترکیب انتخاب شود و یک ادویهٔ مخصوص دیگر نباید با آن ترکیب شود. با این شرایط این آشپز چند نوع طعم متمایز می‌تواند درست کند؟**

۱) ۸۴

۲) ۹۱

۳) ۹۲

۴) ۹۶

**۱۰- هشت نفر به چند طریق می‌توانند در یک اتاق سه نفره، یک اتاق چهار نفره و یک اتاق یک نفره قرار گیرند؟**

۱) ۲۴۰

۲) ۲۸۰

۳) ۳۶۰

۴) ۴۲۰

**مجموعه، الگو و دنباله : ریاضی۱**

۱- حاصل ضرب ۱۰ جمله اول دنباله $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$ کدام است؟

۱) $-11$

۲) $-22$

۳) $-\frac{22}{10}$

۴) $11$

۲- در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ اول مربع جملهٔ دوم است و جملهٔ چهارم برابر ۶ می‌باشد. جملهٔ اول کدام است؟

۱) ۳۶

۲) ۶

۳) $\frac{1}{36}$

۴) $\frac{1}{6}$

۳- در دنباله $2,4,9,17,28,...$ ، تفاضل جملات نهم و دهم چقدر است؟

۱) ۲۳

۲) ۲۶

۳) ۲۹

۴) ۳۰

۴- اگر بازهٔ $(\frac{1}{n+2}, \frac{n+1}{3})$ شامل فقط یک عدد صحیح باشد، چند مقدار طبیعی برای $n$ وجود دارد؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۵- اگر $A$ و $B$ دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، مجموعه $(A-B)' \cap (A \cup B) \cap A'$ لزوما برابرکدام است؟

۱) $B-A$

۲) $B$

۳) $\varnothing$

۴) $A'$

۶- اگر $\frac{1}{3}$اعضای مجموعهٔ $A$ با مجموعهٔ $B$ و $\frac{2}{5}$ اعضای مجموعهٔ $B$ با مجموعهٔ $A$ مشترک باشند و بدانیم که $n(A \cup B) = 45$ است، مقدار $n(A \cap B)$ کدام است؟

۱) ۳۰

۲) ۲۵

۳) ۱۰

۴) ۲۰

۷- اگر جملات دنبالهٔ حسابی $x-4,2x,x+2,...$ را در عدد $\frac{2k}{5}$ ضرب کنیم، قدرنسبت دنبالهٔ جدید برابر ۶ می‌شود. در این صورت حاصل $\frac{k}{x}$ کدام است؟

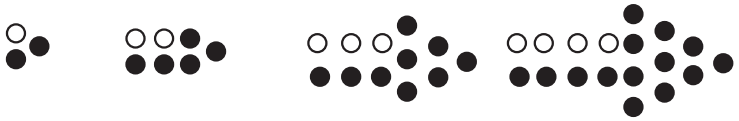
۱) ۵-

۲) ۶-

۳) ۶

۴) ۵

۸- در الگوی زیر، تعداد نقطه‌های رنگی در شکل یازدهم کدام است؟



(۱) (۲) (۳) (۴)

۱) ۶۶
۲) ۷۷
۳) ۸۸
۴) ۹۲

۹- در یک دنباله‌ی هندسی صعودی، جمله‌ی دوم و دو برابر جمله‌ی پنجم و جمله‌ی هشتم می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آنهاست؟

۱) $۲+\sqrt{۳}$
۲) $۵+۲\sqrt{۳}$
۳) $۵+۴\sqrt{۳}$
۴) $۷+۴\sqrt{۳}$

۱۰- مجموعه‌های $A=\{a,a+d,a+۳d\}$ و $B=\{b,bq,bq^{۲}\}$ مفروضند. اگر $A\cap B=A\cup B$، مجموع مقادیر ممکن برای $q$ کدام است؟ $(a,b\neq ۰)$

۱) ۱
۲) صفر
۳) -۱
۴) -۲

۱- از مجموعهٔ {۱۴۴ , ... ,۲۶ , ۲۵}، عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که این عدد مضرب ۳ باشد، ولی مضرب ۷ نباشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۷}{۲۴}$

۲) $\frac{۲۳}{۱۲۰}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۱۰}$

۲- یک تاس داریم که روی وجه‌های آن اعداد ۲، ۲، ۳، ۴، ۴ و ۵ نوشته شده است. اگر این تاس را دو بار پرتاب کنیم، با چه احتمالی مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ خواهد بود؟

۱) $\frac{۱}{۶}$

۲) $\frac{۵}{۱۲}$

۳) $\frac{۲}{۹}$

۴) $\frac{۱}{۴}$

۳- دو پیشامد A و B مستقل‌اند. اگر احتمال آن که A رخ دهد و B رخ ندهد برابر $\frac{۱}{۷}$ و احتمال آن که نه A رخ دهد و نه B، برابر $\frac{۳}{۷}$ باشد، احتمال آن که هم A و هم B رخ بدهد چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$

۲) $\frac{۵}{۲۸}$

۳) $\frac{۴}{۷}$

۴) $\frac{۳}{۲۸}$

۴- از مجموعهٔ اعداد طبیعی دو رقمی که بر ۴ یا ۶ بخش‌پذیرند ولی بر ۱۲ بخش‌پذیر نیستند، عددی به تصادف انتخاب کرده‌ایم. با کدام احتمال این عدد بر ۴ بخش‌پذیر نیست؟

۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱۵}{۲۹}$

۴) $\frac{۷}{۲۹}$

۵- دو خانوادهٔ $A$ و $B$ دارای تعدادی مساوی فرزند هستند. ۳ بلیط شهربازی را به صورت تصادفی بین همهٔ بچه‌ها توزیع می‌کنیم، به‌طوری که به هیچ بچه‌ای بیش از یک بلیط نرسد. اگر احتمال آن‌که هر سه بلیط به فرزندان خانوادهٔ $B$ برسد $\frac{۱}{۱۲}$ باشد، تعداد فرزندان هر خانواده کدام است؟

۱) ۳ ۳) ۵
۲) ۴ ۴) ۶

۶- چهار مهرهٔ سفید و چهار مهرهٔ سیاه، هر کدام به شماره‌های ۱ تا ۴ در کیسه‌ای قرار دارند. دو مهره از کیسه خارج می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع عددهای دو مهره عددی اول است، با چه احتمالی دو مهره غیرهم‌رنگ‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۸}{۱۷}$
۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۹}{۱۷}$

۷- با جابه‌جایی حروف $a , a , a , b , c , d , e$ به تصادف، کلمه‌ای ۷ حرفی ساخته‌ایم. اگر هیچ دو حرف یکسانی کنار هم نباشند، با چه احتمالی، کلمه با حرف $a$ شروع می‌شود؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$
۲) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۸- دو ظرف داریم که در ظرف اول ۳ سیب قرمز و ۲ سیب سبز و در ظرف دوم ۳ سیب قرمز و ۴ سیب سبز وجود دارد. دو سیب از هر ظرف به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که سیب‌های خارج شده از ظرف اول همرنگ و سیب‌های خارج شده از ظرف دوم غیرهمرنگ باشند، چقدر است؟

۱) $\frac{۷}{۳۲}$ ۳) $\frac{۵}{۳۳}$
۲) $\frac{۹}{۳۵}$ ۴) $\frac{۸}{۳۵}$

۹- $A$ و $B$ دو پیشامد از فضای نمونهٔ $S$ هستند، به‌طوری که $A \subseteq B$. اگر $P(A) = \frac{۱}{۵}$ و $P(B') = \frac{۳}{۱۰}$ باشند، حاصل $\frac{P(A' \mid B')}{P(B \mid A')}$ کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۵}$ ۳) $\frac{۷}{۱۰}$
۲) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۱۰}{۷}$

۱۰- یک شرکت تولیدی دارای دو خط تولید $A$ و $B$ است. احتمال این‌که محصول تولیدی خط $A$، سالم باشد برابر ۰/۸ و احتمال این‌که محصول تولیدی خط $B$، سالم باشد برابر ۰/۶ می‌باشد. اگر بدانیم در شروع تولید محصول، از هر خط تنها یک محصول تولید شده و فقط یکی از آن‌ها سالم بوده است، با کدام احتمال این محصول متعلق به خط $B$ بوده است؟

۱) $\frac{۳}{۲۲}$ ۳) $\frac{۲}{۱۱}$
۲) $\frac{۳}{۱۱}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

**آمار : ریاضی۱ + ریاضی۲**

**۱- نوع متغیرهای «گروه خونی – میزان قندخون – تعداد سیب‌های یک درخت»، به ترتیب کدام نوع است؟**

۱) کیفی اسمی- کمی گسسته – کمی پیوسته

۲) کیفی اسمی – کمی گسسته – کمی گسسته

۳) کیفی ترتیبی – کمی پیوسته – کمی پیوسته

۴) کیفی اسمی – کمی پیوسته – کمی گسسته

**۲- معلمی در ثبت نمرات ریاضی کلاس ۲۰ نفری خود، نمره ۱۱/۵ را به اشتباه ۱۵/۵ و نمره ۷/۵ را ۱۷/۵ ثبت کرده است. اختلاف میانگین محاسبه شده با این دو خطا و میانگین واقعی برابر کدام است؟**

۱) ۰/۳

۲) ۰/۵

۳) ۰/۷

۴) ۰/۸

**۳- از بین داده‌های ۱۳ و ۱۹ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۰ و ۱۵ کدام داده را حذف کنیم تا میانگین داده‌ها تغییر نکند؟**

۱) ۱۵

۲) ۱۴

۳) ۱۰

۴) ۱۳

**۴- در داده‌های آماری و طبیعی $۷,۸,۳,k,۳,۱۴,۲,۱۰$ اگر دامنهٔ تغییرات برابر ۱۶ باشد، آن‌گاه میانگین داده‌های کوچکتر از میانه کدام است؟**

۱) $\frac{۱۷}{۴}$

۲) $\frac{۱۵}{۴}$

۳) ۴

۴) ۴/۵

**۵- اگر نرخ بیکاری در ۸ سال اخیر به صورت زیر باشد، حاصل $\frac{۲Q_۱ - Q_۲ + Q_۳}{Q_۱ + Q_۳}$ به تقریب کدام است؟**

۱/۲ , ۳/۵, ۴/۷ , ۵/۸ , ۲/۱, ۳/۷ ,۹/۱, ۸/۷

۱) ۰/۸ ۳) ۰/۸۲

۲) ۰/۸۶ ۴) ۰/۹

**۶- اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^۲ + x - ۱ = ۰$ را داده‌های آماری فرض کنیم، واریانس این داده‌ها کدام است؟**

۱) ۱/۲۵ ۳) ۱/۷۵

۲) ۱/۵ ۴) ۲

۷- اگر واریانس داده‌های ۴ و $c+3$ و $2b$ و $a-2$ برابر صفر باشد، آنگاه واریانس داده‌های $a,b,c,5,6,4$ کدام است؟

۱) $\frac{10}{3}$

۲) $\frac{11}{3}$

۳) $\frac{13}{6}$

۴) $\frac{17}{6}$

۸- اگر انحراف معیار و میانگین داده‌های $2x_4+1$ ، $2x_3+1$ ، $2x_2+1$ و $2x_1+1$ به ترتیب برابر ۱۰ و ۲۷ باشد، ضریب تغییرات داده‌های $3x_4-4$ ، $3x_3-4$ ، $3x_2-4$ و $3x_1-4$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{13}$

۲) $\frac{3}{7}$

۳) $\frac{11}{35}$

۴) $\frac{7}{13}$

۹- کوچک‌ترین ضریب تغییرات دسته‌های سه‌تایی از اعداد زوج متوالی دورقمی با رقم دهگان یکسان، کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

۲) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

۳) $\frac{1}{12\sqrt{6}}$

۴) $\frac{1}{24\sqrt{6}}$

۱۰- ۵ دادهٔ آماری با میانگین ۴ مفروضند. اگر یک دادهٔ برابر با صفر را حذف کنیم، ضریب تغییرات ۲۰ درصد کاهش می‌یابد. واریانس داده‌های اولیه کدام است؟

۱) ۱۰

۲) ۱۵

۳) ۲۰

۴) ۲۵

۱- در انجام ویرایش یک کتاب دانشگاهی، اگر سارا و زهرا ۲ روز با هم کار کنند، نیاز است سارا ۶ روز دیگر به تنهایی کار را ادامه دهد تا پروژه به اتمام برسد و اگر سارا و زهرا با هم ۶ روز کار کنند، نیاز است زهرا ۳ روز دیگر کار را ادامه دهد تا ویرایش به اتمام برسد. سرعت انجام کار زهرا چند برابر سارا است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۴

۴) $\frac{۲}{۷}$

۲- جدول تعیین علامت عبارت $P(x)=\frac{(x-۲\sqrt{x}-۳)(ax+۳)}{۲x-b}$ به صورت زیر است. حاصل $b-۳a$ کدام است؟

| x | | ۳ | |
|---|---|---|---|
| P(x) | + | ت ن | − ۰ − |

۱) ۵

۲) ۶

۳) ۷

۴) ۸

۳- به ازای چند مقدار صحیح $m$، معادلهٔ $|۳x-۵|=mx+۱۰+|۳x+۵|$، فقط دو جواب دارد؟

۱) ۹

۲) ۱۰

۳) ۱۱

۴) ۱۲

۴- مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $(x-۱)(-۲x^۲+۴ax+b)\geq ۰$ به صورت $(-\infty\ ,\ ۳]$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -۵

۲) -۴

۳) -۳

۴) -۲

۵- اگر $m$ جواب معادلهٔ $\sqrt{۱۲+x}-\sqrt{۲x+۷}=۲$ باشد، آن‌گاه مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{۲}{x}-\frac{mx+m}{x^۲}=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) ۲

۳) $\frac{۵}{۲}$

۴) ۳

۶- اگر مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $-۲<ax+۳<۸$ شامل ۹ عدد صحیح باشد، حدود مثبت $a$ کدام است؟

۱) $(\frac{۵}{۶},\frac{۵}{۴})$

۲) $(\frac{۶}{۵},\frac{۵}{۴})$

۳) $[۱,\frac{۶}{۵})$

۴) $[۱,\frac{۵}{۴})$

۷- معادلهٔ $|x|+|x^۲-۴|=۳$ چند جواب دارد؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۸- معادله $\sqrt{۲x-۳}=\sqrt{x+\sqrt{x-۲}}-\sqrt{۲-x}$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) ۳

۲) ۲

۳) ۱

۴) صفر

۹- معادلهٔ $\sqrt{x+۱}+۲=۲\sqrt{x+۲}$ چند جواب دارد؟

۱) هیچ

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۱۰- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{۳}{x^۲+۱۱x+۲۸}+\frac{۲}{x^۲+۶x+۸}+\frac{۱}{x^۲+۳x+۲}=۶$ کدام است؟

۱) ۷

۲) ۸

۳) -۷

۴) -۸

**هندسه تحلیلی+ هندسه – ریاضی۲**

**۱- مساحت مثلث ABC با رئوس $A(۲,-۳)$ ، $B(۴,۱)$ و $C(۳,-۴)$ کدام است؟**

۱) ۳

۲) $۳\sqrt{۵}$

۳) ۶

۴) $۶\sqrt{۵}$

**۲- فاصلهٔ نقطهٔ برخورد دو خط $x+۲y=۴$ و $y-۲x=۳$ از نیمساز ناحیه اول و سوم محورهای مختصات کدام است؟**

۱) $\frac{۱۳\sqrt{۵}}{۲}$

۲) $\frac{۱۳}{\sqrt{۲}}$

۳) $\frac{۱۳\sqrt{۲}}{۱۰}$

۴) $\frac{۱۳\sqrt{۵}}{۱۰}$

**۳- اگر فاصلهٔ خط $۳x-۴y+۶=۰$ از نقطهٔ $(۳,k)$ برابر ۱ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای $k$ کدام است؟**

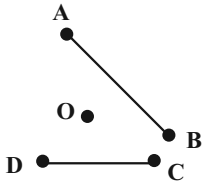
۱) ۵

۲) ۷/۵

۳) ۱۲

۴) ۱۵/۵

**۴- مطابق شکل زیر، فاصلهٔ نقطهٔ $O$ از چهار نقطهٔ $A$،$B$،$C$وD یکسان و برابر ۵ می‌باشد. اگر طول پاره‌خط ABوCD به‌ترتیب ۸و۶ باشد، مجموع فواصل نقطهٔ $O$ از این دو خط کدام است؟**




۱) ۳

۲) ۷

۳) ۴

۴) ۵

**۵- نقاط $A(۱,۲)$ ، $B(a-۳,۵)$ و $C(۶,a)$ در یک راستا قرار دارند، مجموع مقادیر ممکن برای $a$ کدام است؟**

۱) ۸

۲) ۷

۳) ۶

۴) ۵

**۶- اگر نقطهٔ $A(۲,۱)$ رأس مستطیلی با دو ضلع مجاور به معادلات $۳x+y=۵$ و $ax+۳y=۹$ باشد، مساحت آن مستطیل کدام است؟**

۱) ۱/۲

۲) ۱/۶

۳) ۱/۸

۴) ۲/۴

۷- نقطه $A$ وسط پاره خط $CD$ قرار دارد و در معادلهٔ $y = 4x + 4$ صدق می‌کند. اگر $C : (6, m-1)$ و $D : (-2m, 3)$ باشد، آنگاه $m$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{10}$

۲) $\frac{9}{34}$

۳) $\frac{34}{9}$

۴) $\frac{10}{3}$

۸- عرض از مبدأ نیمساز خطوط $3x - 4y = 4$ و $12x + 5y = 9$، کدام گزینه می‌تواند باشد؟

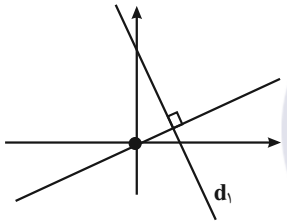
۱) $-\frac{1}{11}$

۲) $\frac{-3}{11}$

۳) $-\frac{11}{3}$

۴) $\frac{-1}{3}$

۹- خط $d_1$ با شیب ۲- مفروض است. اگر $d_2 \perp d_1$ و مساحت ناحیهٔ محصور بین این دو خط و محور عرض‌ها برابر با ۲۰ باشد، مجموع طول و عرض نقطهٔ برخورد دو خط مذکور کدام است؟




۱) ۴

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۱۰

۱۰- با دانستن $AB = c$، $AC = b$ و $AH = h$، چند مثلث غیر هم نهشت برای شکل $ABC$ قابل فرض است؟ $(AH \perp BC)$

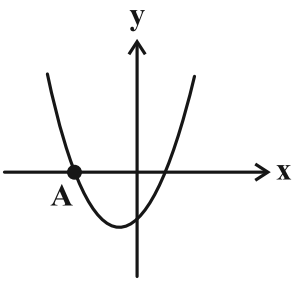
۱) صفر یا یک

۲) صفر یا دو

۳) صفر، یک یا دو

۴) یک، دو یا بی‌شمار

۱- شکل زیر سهمی $y = ۲x^۲ + ۵x - ۳$ را نشان می‌دهد. طول نقطهٔ $A$ کدام است؟



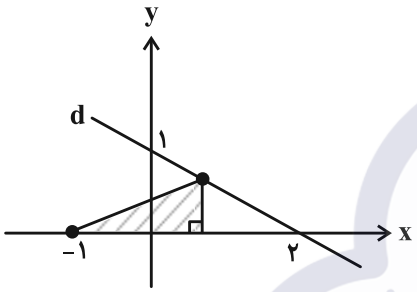

۱) $-۲$

۲) $-\frac{۵}{۲}$

۳) $-۳$

۴) $-\frac{۷}{۲}$

۲- با توجه به نمودار زیر، بیشترین مساحت ممکن برای مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی کدام است؟ (یک رأس مثلث روی خط $d$ است و در ناحیهٔ اول مختصات می‌باشد.)



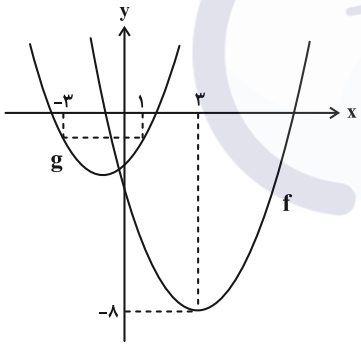

۱) $\frac{۹}{۸}$

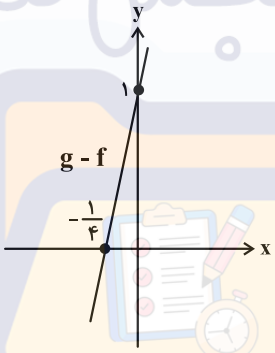
۲) $\frac{۹}{۱۶}$

۳) $\frac{۵}{۸}$

۴) $\frac{۱۱}{۱۶}$

۳- در شکل سمت چپ، نمودارهای دو سهمی $f$ و $g$ رسم شده است. اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $g(x) = ۰$ باشند، حاصل $\alpha^۳ + \beta^۳$ کدام است؟




۱) -۴۶

۲) -۳۸

۳) -۳۰

۴) -۲۲

۴- نمودار سهمی $f(x)$، نیمساز ناحیهٔ اول را در نقاطی به طول ۲ و ۴ قطع می‌کند. اگر نمودار این سهمی برخط $y = x - ۶$ مماس باشد، مقدار $f(۳) + f(۵)$ کدام است؟

۱) ۱۴

۲) ۱۷

۳) ۲۰

۴) ۲۳

۵- می‌دانیم $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^۲ - mx + ۶۴ = ۰$ هستند و $x_۱^۲$ ، $x_۲^۳$ ، $x_۱$ جملات متوالی دنباله هندسی (به ترتیب از چپ به راست) می‌باشند، مقدار $m$ کدام است؟

۱) ۱۲

۲) ۱۸

۳) ۲۰

۴) ۲۴

۶- دو سهمی $y = x^۲ - ۴x + ۷$ و $y = a(x-b)^۲ + c$ نسبت به خط $y = ۲$ قرینه‌اند. مقدار $a+b+c$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) -۲

۴) صفر

۷- اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $(۲\beta-۱)x^۲ - ۳\alpha x + \alpha = ۰$ باشند، کمترین مقدار $\alpha\beta$ کدام است؟ $(\alpha,\beta \neq ۰)$

۱) -۰/۱

۲) -۰/۵

۳) ۰/۵

۴) ۰/۱

۸- نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$، محور $y$ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور $x$ها را در نقاطی به طول‌های ۱- و ۲ قطع کرده است، این سهمی از کدام یک از نقاط زیر عبور می‌کند؟

۱) $(-۲ , -۴)$

۲) $(-۴ , ۱۴)$

۳) $(۳ , ۴)$

۴) $(۱ , -۲)$

۹- سهمی $y = -x^۲ + bx + c$ با خط $y = ۴x - b$، دو نقطهٔ مشترک دارد که یکی از آن‌ها روی محور $y$ها است. اگر بیشترین مقدار سهمی برابر با ۳ و در ربع دوم باشد، حاصل $bc$ کدام است؟

۱) -۱۶

۲) -۴

۳) -۳۶

۴) -۹

۱۰- مجموع مجذورهای جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $(m-۱)x^۲ - (m+۱)x + ۱ = ۰$ از مجموع معکوس ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم یک واحد کمتر است. حاصل‌ضرب جواب‌های این معادله کدام است؟

۱) ۱ ۳) ۳

۲) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

## هندسه– ریاضی ۲

۱- اگر $\frac{a}{۲}=\frac{b}{۳}=\frac{c}{۵}$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{۳a-۲b+c}{۲a+۲b-c}$ کدام است؟

۱) ۰/۵

۲) ۱

۳) ۱/۵

۴) ۲

۲- نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۴۹}{۱۲۸}$ است. اگر یک ضلع مثلث کوچکتر ۲۱ سانتی‌متر باشد، ضلع متناظر به این ضلع در مثلث بزرگتر چند سانتی‌متر است؟

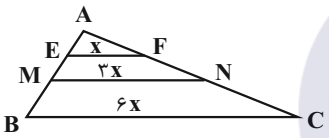
۱) $۲۱\sqrt{۲}$

۲) $۲۱\sqrt{۳}$

۳) $۲۴\sqrt{۲}$

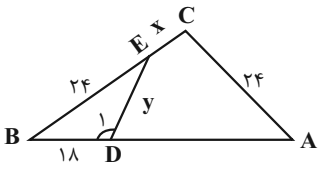
۴) $۲۴\sqrt{۳}$

۳- در شکل مقابل $EF \parallel MN \parallel BC$ است. حاصل $\frac{AE}{AM}+\frac{AM}{AB}$ کدام است؟



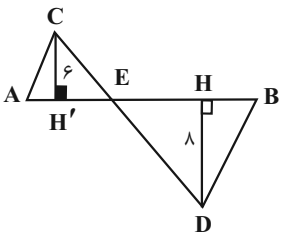

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۶}{۵}$

۴- در شکل مقابل $AB=۴۸$ و $\hat{C}=\hat{D}_۱$ است، آنگاه مقدار $x-y$ کدام است؟



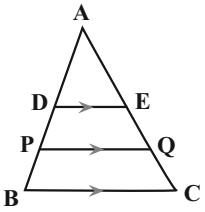

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

۵- در شکل مقابل $AB=۳۵$ و $AC \parallel BD$ است. مساحت مثلث BDE کدام است؟



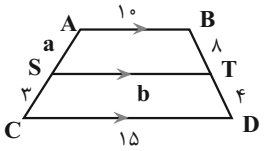

۱) ۶۰ ۲) ۷۵ ۳) ۸۰ ۴) ۸۵

۶- در مثلث ABC، خطوط DE و PQ موازی با ضلع BC هستند. اگر $\frac{AP}{PB}=\frac{۳}{۲}$ و $\frac{AD}{DB}=\frac{۲}{۳}$ باشد، نسبت مساحت ذوزنقهٔ DPQE به مساحت مثلث ADE کدام است؟




۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) ۱

۷- در ذوزنقهٔ زیر $AB \parallel ST \parallel CD$ است. اندازه $a+b$ تقریباً برابرکدام است؟

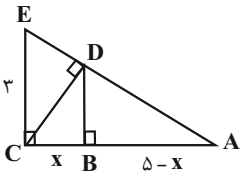



۱) ۱۸/۲۲ ۲) ۲۰/۳۳ ۳) ۱۷/۳۳ ۴) ۱۹/۳۳

۸- در مثلث ABC، ارتفاع AH برابر ۳ واحد است و قاعدهٔ BC را به نسبت ۵ و ۳ تقسیم کرده است. اگر پاره‌خطی موازی با AH رسم کنیم که مثلث ABC را به دو شکل با مساحت برابر تقسیم کند، طول آن پاره‌خط چقدر است؟

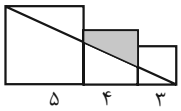
۱) $\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۳}$
۲) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۳}$
۳) $\frac{۶\sqrt{۵}}{۵}$
۴) $\frac{۸\sqrt{۳}}{۵}$

۹- در شکل مقابل، ارتفاع هر دو مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه x تقریبا برابر کدام است؟




۱) ۱/۵۶ ۲) ۱/۲۰ ۳) ۱/۴۲ ۴) ۱/۳۲

۱۰- در شکل زیر سه مربع به اضلاع ۳، ۴ و ۵ در کنار هم قرار دارند. مساحت قسمت هاشور خورده کدام است؟




۱) $\frac{۲۳}{۳}$ ۲) $\frac{۱۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱۷}{۴}$ ۴) ۶

**۱- ریشهٔ ششم و منفی عدد ۷۲۹ کدام است؟**

۱) ۷-

۲) ۳-

۳) ۹-

۴) وجود ندارد.

**۲- اگر $a$ ریشهٔ دوم و منفی عدد $7-4\sqrt{3}$ باشد، ریشهٔ سوم عدد $a-5a^{-1}+2$ کدام است؟**

۱) $\sqrt{3}+1$

۲) $\sqrt{3}-1$

۳) $2\sqrt{3}+1$

۴) $2\sqrt{3}-1$

**۳- در شرایطی مساعد جرم یک نوع باکتری پس از کشت هر دو ساعت دو برابر می‌شود. جرم این باکتری‌ها پس از ۲۶۰ دقیقه چند برابر می‌شود؟**

۱) $4\sqrt[3]{2}$ ۳) $4\sqrt[3]{4}$

۲) $4\sqrt[6]{2}$ ۴) $4\sqrt[4]{8}$

**۴- اگر مقدار $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}$ برابر با ۱ باشد، حاصل $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x-x^2}+\sqrt[3]{x^2-4x+4}$ برابر کدام است؟**

۱) ۲ ۳) ۱

۲) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

**۵- اگر $x^2+\frac{1}{x^2}=18$ باشد، حاصل $x^3-\frac{1}{x^3}$ کدام است؟ $(0<x<1)$**

۱) ۶۸ ۳) ۶۸-

۲) ۷۶- ۴) ۷۶

**۶- حاصل $(\sqrt{3}-2)^2(\sqrt{2}+\sqrt{6})^3$ کدام است؟**

۱) $2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ ۳) $4(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

۲) $4-2\sqrt{3}$ ۴) $8-4\sqrt{3}$

**۷- حاصل عبارت $M=(16x^2-4x+1)(16x^2-1)(16x^2+4x+1)$ به ازای $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}$ کدام است؟**

۱) ۱۲۸

۲) ۲۵۶

۳) ۵۱۲

۴) ۱۰۲۴

۸- اگر $A = ۵(\sqrt{۲}+۱)^{-۱} + \frac{۷+۴\sqrt{۲}}{۳+۲\sqrt{۲}}$ باشد، کدام عدد زیر یک عدد گویاست؟

۱) $۳A+\sqrt{۲}$

۲) $\sqrt{۲}A$

۳) $A-\sqrt{۲}$

۴) $A+\sqrt{۲}$

۹- حاصل عبارت $\frac{x^۴+x^۲+۱}{x^۲+x+۱}$ به ازای $x = \sqrt{۲}+۱$ کدام است؟

۱) $۳+\sqrt{۲}$

۲) $۵+\sqrt{۳}$

۳) $۵+۳\sqrt{۳}$

۴) $۳+۲\sqrt{۲}$

۱۰- اگر $A = \frac{۶}{۳\sqrt[۳]{۳}+۳+\sqrt[۳]{۹}}$، حاصل $A^۳+۹A$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۶

۳) ۹

۴) ۱۲

## هندسه تحلیلی

۱- اگر ۳ نقطه $A(1,3)$ و $B(-2,-2)$ و $C=(-2,4)$، رئوس یک مثلث باشند، طول میانه AM کدام است؟ (میانه AM ضلع BC را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.)

۱) ۲

۲) $\sqrt{19}$

۳) $\sqrt{13}$

۴) ۳

۲- دو نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم وجود دارند که فاصله آن از مرکز دایره به مختصات $O(3,0)$ برابر با $\sqrt{17}$ است، قدرمطلق تفاضل طول‌های دو نقطه کدام است؟

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۳

۳- خطوط $x-2y-\frac{3}{2}=0$ و $-2x+4y=7$ اضلاع یک مستطیل به مساحت $2\sqrt{5}$ هستند. اندازهٔ طول و محیط این مستطیل کدام است؟

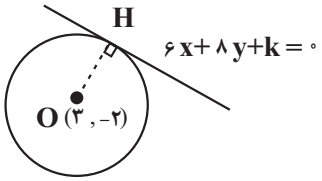
۱) $\sqrt{5}$، $2+\sqrt{5}$

۲) ۲، $4+2\sqrt{5}$

۳) ۲، $2+\sqrt{5}$

۴) $\sqrt{5}$، $4+2\sqrt{5}$

۴- اگر مساحت دایره شکل زیر $36\pi$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای k کدام است؟




۱) ۲

۲) -۲

۳) ۴

۴) -۴

۵- سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB:-y+3x=4$ و $BC:2y+x=1$ و $AC:y+x+1=0$ هستند. طول ارتفاع AH کدام است؟

۱) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

۲) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

۳) $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

۴) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$

۶- نقاط $A(\alpha,2)$ و $B(1,2\alpha)$ دو سر قطر دایره‌ای به شعاع $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ هستند. نقاط A و B در ناحیه اول مختصات می‌باشند. مجموع طول و عرض مرکز دایره کدام است؟

۱) $\frac{15}{2}$

۲) $\frac{7}{2}$

۳) $\frac{13}{2}$

۴) $\frac{5}{2}$

**۷- اگر نقطه $A(۴,b)$ روی خطی باشد که از نقطه $(-۳,۸)$ می‌گذرد و این خط نیز عمود بر خطی باشد که از نقاط $(-۷,۳)$ و $(-۵,-۳)$ می‌گذرد، آنگاه $b$ کدام است؟**

۱) $-۶$

۲) $\frac{۲۳}{۲}$

۳) ۲۲

۴) ۴۳

**۸- اگر خطوط $۲kx+۸y=k-۱$ و $۵x+(k-۱)y=-k+۷$ هیچ نقطه برخوردی با یکدیگر نداشته باشند، آنگاه نقطه $(k-۳,-k+۷)$ در کدام ناحیه قرار می‌گیرد؟**

۱) اول

۲) دوم

۳) سوم

۴) چهارم

**۹- قرینه نقطهٔ $(۱,۲)$ نسبت به خط $y=ax+b$، نقطهٔ $(-۳,۴)$ است. حاصل $a^۲b$ کدام است؟**

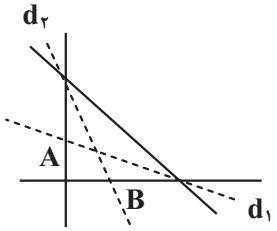
۱) ۲۰

۲) ۱۰۰

۳) ۳۶

۴) ۲۴

**۱۰- خط $d_۱$ و $d_۲$ نیمساز زاویه‌های خط $۳y+۴x-۱۶=۰$ با محورهای مختصات است. مجموع طول نقطه $B$ و عرض نقطه ی $A$ چقدر است؟**




۱) ۴

۲) $\frac{۳۴}{۹}$

۳) $\frac{۳۱}{۹}$

۴) $\frac{۱۱}{۳}$

## هندسه

**۱- دایره‌ای به طوری در داخل یک مثلث قرار گرفته که بر هر سه ضلع آن مثلث مماس است. مرکز این دایره محل برخورد ..... مثلث است.**

۱) عمودمنصف‌های
۲) نیمسازهای
۳) ارتفاع‌های
۴) هیچکدام

**۲- در یک مربع به ضلع ۴، چند نقطه روی محیط آن وجود دارد که فاصله آن‌ها از مرکز مربع $\sqrt{۶}$ باشد؟**

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) هیچ نقطه‌ای وجود ندارد.

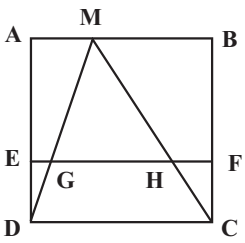
**۳- نقطهٔ C روی عمودمنصف پاره خط AB به طول ۶ قرار دارد. اگر فاصلهٔ C از دو نقطهٔ A و B به‌ترتیب $۲x+۱$ و $۳x-۱$ باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟**

۱) ۶
۲) ۱۸
۳) ۱۲
۴) ۱۵

**۴- اندازهٔ محیط‌های دو مثلث متشابه ۹ و ۱۵ است. اگر مساحت مثلث بزرگتر ۶۴ باشد، مساحت مثلث کوچکتر کدام است؟**

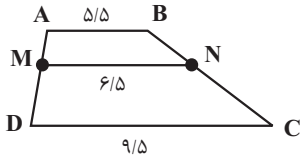
۱) $۲۳\frac{۱}{۲۵}$
۲) $۲۳\frac{۲}{۲۵}$
۳) $۲۳\frac{۱۳}{۲۵}$
۴) $۲۲\frac{۲۲}{۲۵}$

**۵- از نقطهٔ دلخواه M که روی ضلع AB از مربع ABCD به ضلع ۶ واحد قرار دارد، دو خط به رأس‌های C و D وصل شده است. اگر پاره خط EF که موازی DC است، دو ضلع مربع را به نسبت ۱ به ۴ قطع کند، مجموع دو پاره‌خط EG و HF برابر کدام است؟**



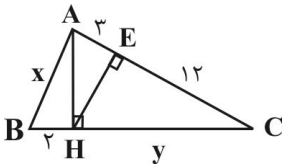

۱) ۱
۲) ۱/۲
۳) ۱/۶
۴) ۱/۸

۶- در ذوزنقهٔ ABCD مطابق شکل زیر، نسبت $\frac{AM}{AD}$ کدام است؟



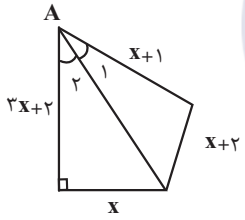

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

۷- با توجه به شکل زیر، مقدار $x+y$ کدام است؟



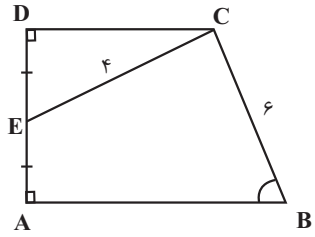

۱) $۷+۶\sqrt{۵}$
۲) $۵+۶\sqrt{۵}$
۳) $۷+۳\sqrt{۵}$
۴) $۵+۳\sqrt{۵}$

۸- اگر در شکل مقابل $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ باشد، مقدار x کدام است؟



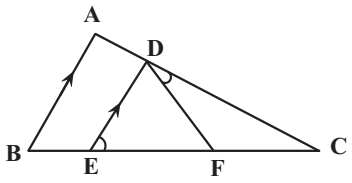

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$

۹- در شکل مقابل ذوزنقهٔ قائم الزاویه ABCD را مشاهده می‌کنید. اگر $\hat{B} = C\hat{E}D$ و $ED = AE$ باشد، مساحت ABCD چقدر است؟




۱) ۲۴
۲) ۱۸
۳) ۳۲
۴) ۳۶

۱۰- اگر در شکل مقابل $DE \parallel AB$ باشد و $AD = ۲$ ، $BE = ۴$ و $FC = ۲$ باشد و $D\hat{E}F = F\hat{D}C$ باشد، اندازه EF چقدر است؟




۱) ۳
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۸

۱- اگر مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{x+b}{2x+4} < 1 < 4$ به صورت $(k,1)$ باشد، حاصل $b+7k$ کدام است؟

۱) $-4$ ۲) $-5$ ۳) $-6$ ۴) $-7$

۲- تابع خطی $f$ فقط در بازهٔ $(-1,+\infty)$ مثبت است. مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{f(x)}{x^2-1} \leq 0$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۳- مجموع جواب‌های غیرمشترک معادلات $x(x-4) = \sqrt{441}$ و $3x^2 - 19x - 14 = 0$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{3}$ ۲) $-\frac{8}{3}$ ۳) $-\frac{10}{3}$ ۴) $-\frac{11}{3}$

۴- تابع خطی $f$ را در نظر بگیرید. اگر $x = \frac{3}{4}$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $f(1)x^2 - f(2)x + 1 = 0$ باشد، مقدار $f(8)$ کدام است؟

۱) $\frac{27}{4}$ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) $\frac{21}{4}$

۵- اگر ریشه‌های معادلهٔ $(x^2-4x+3)(x^2+mx) = 0$ چهار عدد صحیح و متوالی باشند، در حل معادلهٔ $x^2 + mx = 1 - 3m$ به روش مربع کامل، از کدام عدد ثابت جذر گرفته می‌شود؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۶- به ازای کدام مقدار $m$، در معادلهٔ $(x+2)^3 - (x+1)^3 - mx = 0$ مجموع جواب‌ها برابر ۶ است؟

۱) ۹ ۲) ۲۷ ۳) $-27$ ۴) $-9$

۷- طول و عرض مستطیلی یک واحد اختلاف دارند. اگر مساحت مستطیل برابر $\sqrt{6-4\sqrt{2}}$ باشد، محیط آن کدام است؟

۱) $2(\sqrt{2}-1)$ ۲) $2(\sqrt{2}+1)$ ۳) $2(2\sqrt{2}+1)$ ۴) $2(2\sqrt{2}-1)$

۸- اگر $\alpha$ و $\beta$ جواب‌های معادلهٔ $x(x-1) = x+7$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^3 - 11\beta)$ برابر کدام است؟

۱) ۹۱ ۲) ۹۸ ۳) ۱۰۵ ۴) ۱۱۲

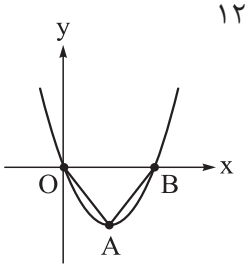
۹- در معادلهٔ $x(4x^2 - 9\sqrt{2x}) + 4 = 0$، نسبت جواب بزرگ‌تر به جواب کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۴ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) ۸ ۴) $8\sqrt{2}$

۱۰- در معادلهٔ $x^4 - \sqrt{6}x^2 + \sqrt{2} = 0$، مجموع مربعات جواب‌ها کدام است؟

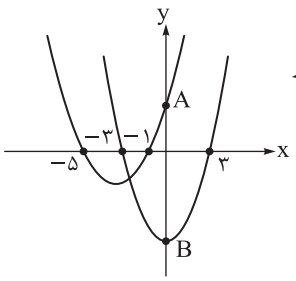
۱) $\sqrt{6}$ ۲) ۶ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) ۱۲

۱۱- نمودار تابع درجه‌دوم $y = f(x)$ مطابق شکل مفروض است. اگر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع $OAB$ برابر $3\sqrt{3}$ باشد، مقدار $f(1)$ کدام است؟




۱) $2(1-\sqrt{3})$ ۲) $-\sqrt{3}$

۳) $1-2\sqrt{3}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$




**۱۲- در شکل مقابل، دو سهمی یکدیگر را در نقطه‌ای به عرض $-\frac{۳۲}{۳}$ قطع کرده‌اند. اگر ضرایب جملهٔ $x^۲$ در معادله‌های هر دو سهمی برابر باشد، طول پاره‌خط AB کدام است؟**

۱) ۱۲ ۲) ۲۷

۳) ۳۶ ۴) ۴۲

**۱۳- نمودار تابع درجه‌دوم $f(x)=ax^۲+(a-۱)x+a-۲$ از هر چهار ناحیهٔ دستگاه مختصات عبور می‌کند. کدام گزینه الزاماً درست است؟**

۱) ممکن است نمودار، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع کند.

۲) نمودار ممکن است بیشترین مقدار را داشته باشد.

۳) طول رأس این سهمی حتماً منفی است.

۴) عرض رأس این سهمی حتماً منفی است.

**۱۴- خط $y=۱۱$ در نقاط A و B و خط $y=k$ در نقاط C و D، سهمی $y=۳۶-x^۲$ را قطع می‌کند. اگر مساحت چهارضلعی ABCD برابر ۸۱ باشد، مقدار k کدام است؟ $(k>۱۱)$**

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۲۷ ۴) ۳۲

**۱۵- سهمی $y=x^۲-۳x+k$ همواره بالاتر از خط $y=۲x-۱$ قرار دارد. اگر k کم‌ترین مقدار صحیح ممکن باشد، کم‌ترین فاصلهٔ سهمی از محور طول‌ها کدام است؟**

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۲/۷۵ ۴) ۳/۷۵

**۱۶- نمودار تابع درجه‌دوم $y=f(x)$ در نقطهٔ A بر خط $y=۵$ مماس است و خط $y=۱$ نیز نمودار آن را در دو نقطهٔ C و B قطع می‌کند. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۸ باشد، اختلاف صفرهای تابع کدام است؟**

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

**۱۷- معادلهٔ $\frac{۱}{x^۲-۴x+۳}+\frac{۱}{x^۲-۴x+۴}=\frac{۷}{۱۲}$ چند جواب حقیقی دارد؟**

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**۱۸- برای طراحی قطعه‌ای، کارگر اول نسبت به کارگر دوم ۶ دقیقه وقت کم‌تری لازم دارد. اگر در ۷ ساعت، کارگر اول ۸ قطعه بیشتر از کارگر دوم طراحی کند، مجموع تعداد قطعاتی که آن‌ها در ۷ ساعت طراحی می‌کنند، کدام است؟**

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۰ ۴) ۴۸

**۱۹- معادلهٔ $x+\sqrt{۴-x\sqrt{x^۲+۴}}=۲$ چند جواب دارد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**۲۰- مجموع جواب‌های معادلهٔ $x^۲+\sqrt[۳]{x^۴-x^۲}=۲x+۱$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) ۲ ۴) −۲

۱- نسبت ریشهٔ پنجم به ریشهٔ سوم عدد ۹ برابر $۳^{a}$ است. اختلاف ریشه‌های دوم عدد $۴+a^{-۱}$ کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

۲- اگر $x^۴+۲x^۲+\frac{۲۵}{(x^۲+۱)^۲}=۹۰$ باشد، حاصل $x^۲+۲-\frac{۵}{x^۲+۱}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱

۳- حاصل عبارت $\sqrt{\sqrt{۵}+۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۲}$ چند برابر جذر جواب بزرگ‌تر معادلهٔ $x^۲=x+۱$ است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

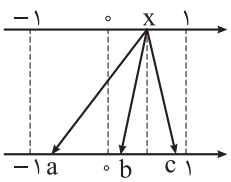
۴- اگر $a^۲+۲ac+۲a=۲۳$، $b^۲+۲ab+۲b=۱۸$ و $c^۲+۲bc+۲c=۲۲$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۵- اگر $x=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$، $y=۱-\sqrt{۳}$ و $z=\sqrt{۲}-۱$ باشد، حاصل عبارت $\frac{xy+yz+xz}{x^۲+y^۲+z^۲}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-۲$ ۴) ۲

۶- در شکل زیر، عدد x از محور بالا به مربع و ریشه‌های دوم و مربع خود روی محور پایین وصل شده است. اگر $\frac{b}{ac^۲}=-\frac{۱}{۸}$ باشد، مقدار $\sqrt[۳]{x}$ کدام است؟




۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۴

۷- اگر $A=\frac{\sqrt{۸\sqrt[۳]{A}}\times ۲^{-\frac{۱}{۲}}}{\sqrt[۳]{۴\sqrt{۲}}\times ۸^{-\frac{۲}{۳}}}$ باشد، مقدار $A^۵$ کدام است؟

۱) $۲^۹$ ۲) $۲^{۱۰}$ ۳) $۲^{۱۲}$ ۴) $۲^{۱۳}$

۸- اگر $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-3}=4$ و $a+\sqrt{x-a}-\sqrt{x-3}=4$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{13}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{11}{3}$

۹- اگر a و b دو عدد حقیقی بزرگ‌تر از یک و $a^3=2+b^3$ باشد، حاصل $\frac{a^2+a+1}{b^2-b+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1+b}{1-a}$ ۲) $\frac{b+1}{a-1}$ ۳) $-\frac{a}{b}$ ۴) $\frac{b}{a}$

۱۰- اگر A و B دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3=A\sqrt{3}-B\sqrt{2}$، آن‌گاه $\frac{B}{A}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $2\frac{3}{4}$ ۳) $1\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۱۱- اختلاف ریشه‌های چهارم عدد $28-16\sqrt{3}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}-2$ ۲) $2\sqrt{3}+2$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۴

۱۲- با فرض $A=\frac{8+3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\frac{3\sqrt{3}-8}{7+2\sqrt{3}}$، حاصل $A+\sqrt{3}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

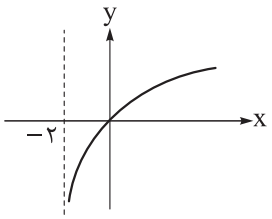
۱۳- حاصل $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1/5}{\sqrt[3]{2}+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt[3]{4}+1}{2}$ ۴) ۱

۱۴- حاصل عبارت $(\frac{4}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt[4]{5}+1)(\sqrt[8]{5}+1)(\sqrt[16]{5}+1)}+1)^{48}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲۵ ۳) ۱۲۵ ۴) ۶۲۵

۱- شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\log_{۳}(ax+b)$ را نشان می‌دهد. حاصل $[\frac{۱}{۲}f^{-۱}(a+b)]$ کدام است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است.)




۱) ۷
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

۲- اگر $f(x)=a+۳^{۱+x}$، $g(x)=\sqrt{x}$ و برد تابع fog بازهٔ $[۲,+\infty)$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-۱$ ۳) ۲ ۴) $-۲$

۳- اگر $f(x)=\log_{۲}x$ و $(gof)(x)=۲^{x}+۳$، مقدار $g^{-۱}(۱۹)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۸

۴- اگر $\log_{۳}۵=m$، حاصل $\log_{۵}۲۷+\log_{۹}۱۲۵$ برحسب m کدام است؟

۱) $\frac{m^{۲}+۶}{۲m}$ ۲) $\frac{m^{۲}-۶}{۲m}$
۳) $\frac{۳m^{۲}-۶}{۲m}$ ۴) $\frac{۳m^{۲}+۶}{۲m}$

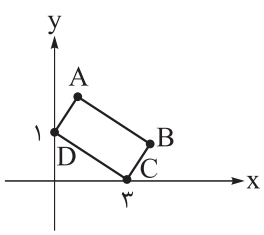
۵- اگر $\log_{۲}a+\log_{۳}b=\frac{۵}{۶}$ و $\log_{۳}a\times\log_{۲}b=\frac{۱}{۶}$، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن a کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۱۲}$ ۲) $\sqrt[۳]{۶}$ ۳) $\sqrt[۶]{۶۴}$ ۴) $\sqrt[۶]{۳۲}$

۶- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $\log|۲-x|+\log\frac{۱}{x^{۲}-۴x+۴}=۳$ باشند، حاصل $\log_{۲\sqrt{۲}}(x_۱+x_۲)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۷- در شکل زیر، مساحت مستطیل برابر ۵ است. مجموع طول نقطهٔ A و عرض نقطهٔ B کدام است؟

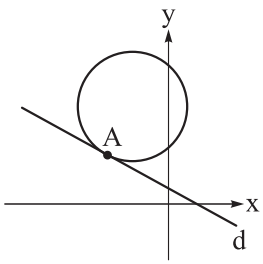



۱) ۲
۲) ۲/۲۵
۳) ۲/۵
۴) ۲/۷۵

۸- دو خط موازی با شیب غیرصفر، یکی محور xها را با طول ۱ و دیگری محور yها را با عرض ۲ قطع می‌کند. اگر فاصلهٔ بین این دو خط موازی ۲ باشد، شیب آن‌ها کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۹- در شکل زیر، شعاع دایره برابر $\sqrt{۱۰}$ و مرکز آن روی خط $y = x + ۵$ قرار دارد. اگر خط d در نقطهٔ $A(-۲,۱)$ بر دایره مماس باشد، معادلهٔ خط d کدام است؟




۱) $۳y + x = ۲$

۲) $۳y + x = ۱$

۳) $۴y + x = ۱$

۴) $۴y + x = ۲$

۱۰- مجموع ۵۰ جملهٔ اول دنبالهٔ $a_n = n + (-۱)^{\frac{n(n+۱)}{۲}}$ کدام است؟

۱) ۱۲۷۳ ۲) ۱۲۷۴ ۳) ۱۲۷۵ ۴) ۱۲۷۶

۱۱- در یک دنبالهٔ حسابی ۵۹جمله‌ای، مجموع ۳ جملهٔ وسط برابر ۶۰ است. اگر قدرنسبت برابر ۳ باشد، جملهٔ چهلم دنباله کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۵۵

۱۲- در دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \ldots$، مجموع پنج جملهٔ اول چند برابر مجموع پنج جملهٔ سوم است؟

۱) ۵۱۲ ۲) $\frac{۱}{۵۱۲}$

۳) ۱۰۲۴ ۴) $\frac{۱}{۱۰۲۴}$

۱۳- اگر $a, b, c$ به ترتیب سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی غیرثابت و $a, ۲b, ۳c$ به ترتیب سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

**۱- اگر میانگین هفت دادهٔ آماری ۲۰ باشد، کدام داده به داده‌ها اضافه شود تا میانگین ۲ واحد کاهش یابد؟**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) امکان‌پذیر نیست.

**۲- اگر میانگین داده‌های $۳x_{۱۰۰} - ۱,۰۰۰, ۳x_۲ - ۱, ۳x_۱ - ۱$ برابر ۵۹ باشد، میانگین داده‌های $x_{۱۰۰} + ۱۰۰, x_۲ + ۲,۰۰۰, x_۱ + ۱$ کدام است؟**

۱) ۱۵۰/۵ ۲) ۷۰/۵ ۳) ۲۲۶/۵ ۴) ۱۲۰/۵

**۳- میانگین ۲۴ دادهٔ آماری برابر ۱۴ است. اگر مجموع داده‌های کم‌تر از چارک اول، مجموع داده‌های بین چارک‌های اول و سوم و مجموع داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم، تشکیل دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۲ بدهند، میانگین داده‌هایی که بین چارک‌های اول و سوم قرار ندارند، کدام است؟**

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

**۴- میانگین و واریانس داده‌های $a, b, c, d$ به ترتیب ۴ و ۵ است. واریانس داده‌های $\frac{a}{۲}, \frac{b}{۲}, \frac{c}{۲}, \frac{d}{۲}, \frac{۱}{۲}$ کدام است؟**

۱) ۰/۸۴ ۲) ۱ ۳) ۱/۱۶ ۴) ۱/۳۶

**۵- در متن زیر متغیرها معلوم شده‌اند. چند متغیر از نوع کیفی ترتیبی هستند؟**

**او در جوانی، در کنکور کارشناسی ارشد رشتهٔ شیمی، رتبهٔ ۲۳ آورد.**
**شاخص آلودگی هوا با مقدار ۱۶۰ در وضعیت خطرناک قرار دارد.**
**اتومبیل با ظرفیت ۵ نفر و جرم ۱۵۰۰ کیلوگرم، در هر صد کیلومتر ۹/۵ لیتر مصرف دارد.**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

**۶- در ۱۸ دادهٔ آماری، چارک‌های اول تا سوم به ترتیب ۱۱، ۱۵ و ۲۲ هستند. اگر میانگین داده‌های کم‌تر از $Q_۱$، بین $Q_۱$ و $Q_۳$ و بیشتر از $Q_۳$ به ترتیب ۷، ۱۶ و ۲۴ باشند، میانگین کل داده‌ها تقریباً کدام است؟**

۱) ۱۵/۸ ۲) ۱۵/۳ ۳) ۱۶/۶ ۴) ۱۶/۱

**۷- تفاضل ۶ دادهٔ آماری از میانگینشان اعداد $b, ۰, ۰, a, -۱, ۳$ هستند. اگر $a$ و $b$ اعداد صحیح باشند، کم‌ترین مقدار واریانس داده‌ها کدام است؟**

۱) ۱/۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**۸- انحراف معیار داده‌های مثبت $a, a+۱, ۲a+۱$ برابر با $\frac{\sqrt{۱۴}}{۳}$ است. نسبت بزرگ‌ترین داده به کوچک‌ترین داده کدام است؟**

۱) ۲/۲۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

**۹- اگر میانگین و واریانس داده‌های $a , b$ ، $۱ , ۳ , ۴ , ۱۰ , a , b$ به ترتیب برابر ۸ و ۳۵ باشد، حاصل $|a-b|$ کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

**۱۰- به ۲۰ دادهٔ آماری با میانگین ۱۲ و واریانس ۶۰، داده‌های ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۵ و ۱۵ را اضافه می‌کنیم. ضریب تغییرات ۲۵ داده تقریباً کدام است؟**

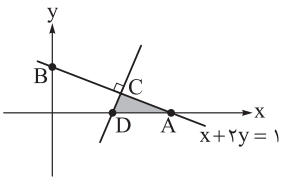
۱) $\frac{۷}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

**۱۱- در داده‌های آماری $۲n+۷, ۲n+۵, ۲n+۳, ۲n+۱$ عدد میانگین شش برابر واریانس است. در داده‌های $۲n-۵, ۲n-۳, ۲n-۱, ۲n+۱, ۲n+۳$ ضریب تغییرات تقریباً چند درصد است؟**

۱) ۱۰ ۲) ۱۱/۲

۳) ۱۲/۴ ۴) ۱۳/۶

۱- در شکل مقابل اگر $BC = ۲AC$، آن‌گاه مساحت مثلث $ACD$ کدام است؟




۱) $\frac{۵}{۷۲}$
۲) $\frac{۵}{۳۶}$
۳) $\frac{۵}{۱۲}$
۴) $\frac{۵}{۱۴۴}$

۲- فاصلهٔ قرینهٔ نقطهٔ $(-۲,۶)$ نسبت به خط $x + y + ۱ = ۰$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۵
۲) $۲\sqrt{۱۰}$
۳) $۵\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

۳- اگر $۳x - ۴y - ۱ = ۰$ و $۲x + y = ۳$ و $۳x + ۲y = ۵$، به ترتیب معادلات خطوطی باشند که اضلاع $AB$، $AC$ و $BC$ از مثلث $ABC$ روی آن‌ها قرار دارد، اندازهٔ ارتفاع $CH$ کدام است؟

۱) ۰/۲
۲) ۰/۳
۳) ۰/۶
۴) ۰/۴

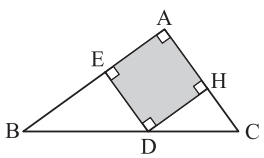
۴- دو رأس $B$ و $C$ از مثلث متساوی‌الساقین $ABC$ $(AB = AC)$ با عرض‌های $-۱$ و ۴ روی خط $y = x + ۱$ واقع‌اند. اگر رأس $A$ روی محور $x$ قرار داشته باشد، مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۷/۵
۲) ۵/۵
۳) ۳/۵
۴) ۱/۵

۵- معادلهٔ دو ضلع مقابل مستطیلی $y = ax - b$ و $y = (۲a - ۱)x + ۴a$ است. اگر $B(۱,۲)$ یک رأس این مستطیل و محیط آن $۱۰\sqrt{۲}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

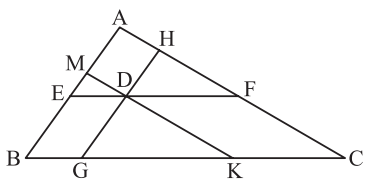
۱) ۱۴
۲) ۲۱
۳) ۱۰/۵
۴) ۱۷/۵

۶- در شکل زیر اگر $BD = ۳CD$، آن‌گاه مساحت قسمت رنگی چه کسری از مساحت مثلث $ABC$ است؟



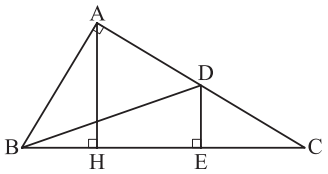

۱) $\frac{۳}{۸}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۴}{۹}$

۷- در مثلث شکل زیر $AB = ۶$، $AC = ۸$ و $BC = ۱۲$. از نقطهٔ $D$ داخل مثلث، پاره‌خط‌های $EF$، $GH$ و $MK$ را موازی اضلاع رسم می‌کنیم. اگر اندازهٔ این سه پاره‌خط برابر باشد، اندازهٔ هر کدام از آن‌ها کدام است؟




۱) ۴
۲) ۵
۳) $\frac{۱۴}{۳}$
۴) $\frac{۱۶}{۳}$

۸ - مطابق شکل، **BD** نیمساز زاویهٔ **ABC** است. اگر $4AB = 3AC$، آن‌گاه حاصل $\frac{HE}{BH}$ کدام است؟




۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۵}{۶}$

۹ - در مثلث قائم‌الزاویهٔ **ABC**، $AB = \sqrt{۲}$ و $AC = ۲$ اضلاع زاویهٔ قائمه‌اند. عمودمنصف وتر این مثلث، ضلع **AC** را در نقطهٔ **M** قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ **A** از **BM** کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\sqrt{۲}-۱$

۱۰- مثلثی به طول اضلاع ۳ و ۲ و **x**، با مثلثی به طول اضلاع ۳ و **y** و **2x** متشابه (غیرهمنهشت) است. نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مساحت مثلث کوچک‌تر، کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۲/۲۵
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

سنجش لاد

**۱- سه ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف، ۱۵ مهره قرار دارد که ۳تای آن‌ها قرمز است. در ظرف دوم، مهرهٔ قرمزی وجود ندارد و در ظرف سوم، نصف مهره‌ها قرمزند. با چشم بسته یک ظرف را انتخاب و یک مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهرهٔ خارج‌شده قرمز است؟**

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۳۰}$

**۲- یک سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید تاس می‌ریزیم و اگر «پشت» بیاید، دوباره سکه را پرتاب می‌کنیم. این روند را تا جایی ادامه می‌دهیم که مجاز به پرتاب تاس باشیم. با کدام احتمال حداکثر بعد از ۳ پرتاب سکه، عدد تاس مضرب ۳ می‌شود؟**

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۲۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

**۳- دانشگاهی ۳۵۰ دانشجو دارد که ۱۵۰ دانشجو پسر و باقی دختر می‌باشند. اگر ۴۰ درصد پسران و ۲۰ درصد دختران این دانشگاه عینکی باشند و بخواهیم یک دانشجو به عنوان نماینده انتخاب کنیم، با چه احتمالی این دانشجو دختر هست ولی عینکی نیست؟**

۱) $\frac{۲}{۳۵}$ ۲) $\frac{۶}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱۶}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱۸}{۳۵}$

**۴- از هر یک از ۳۱ استان کشور برای شرکت در مسابقات، ۶ نفر بالای ۲۰ سال شرکت کرده‌اند که تعداد شرکت‌کنندگان بالای ۳۰ سال هر استان ۲ برابر تعداد شرکت‌کنندگان بین ۲۰ تا ۳۰ سال است. اگر قرار باشد فقط یک نفر قهرمان این مسابقات شود، با چه احتمالی از استان کهگیلویه و بویراحمد است و سن بین ۲۰ تا ۳۰ سال دارد؟**

۱) $\frac{۱}{۹۳}$ ۲) $\frac{۲}{۹۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳۱}$

**۵- در ظرفی ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های انتخابی عددی اول است یا اختلاف آن‌ها ۲ است؟**

۱) ۰/۹ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۷ ۴) ۰/۸

**۶- عدد $a$ با پرتاب تاس انتخاب می‌شود. با کدام احتمال جواب $x$ از معادلهٔ $ax + ۳ = a$ عددی مثبت است؟**

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

**۷- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۵ و ۸ چند عدد طبیعی زوج بدون رقم تکراری و بیشتر از ۲۴۰ می‌توان ساخت؟**

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۱۵ ۳) ۱۱۲ ۴) ۱۱۸

**۸- چند عدد سیزده‌رقمی با ارقام ۴ و ۵ می‌توان نوشت، به طوری که بر ۱۵ بخش‌پذیر باشند؟**

۱) ۱۳۵۳ ۲) ۱۲۹۹ ۳) ۱۳۶۵ ۴) ۱۳۶۶

**۹- متغیرهای «نوع یک متغیر در علم آمار» و «درصد کسب‌شدهٔ یک دانش‌آموز در یک آزمون تستی» چگونه‌اند؟**

۱) کیفی ترتیبی، کمّی پیوسته ۲) کیفی ترتیبی، کمّی گسسته

۳) کیفی اسمی، کمّی پیوسته ۴) کیفی اسمی، کمّی گسسته

**۱۰- اگر $A$ و $B$ دو مجموعهٔ ناتهی باشند، حاصل $\big((A-B)\cup(B-A)\big)' - (A\cup B)'$ برابر کدام مجموعه است؟**

۱) $A\cap B$ ۲) $A'\cap B'$

۳) $A'\cup B'$ ۴) $\varnothing$

**۱۱- اگر $\frac{n(A-B)}{3} = \frac{n(A\cup B)}{5}$ و $n(A\cap B) = 10$، آن‌گاه $n(A-B)$ کدام است؟**

۱) ۳۰ ۲) ۲۵ ۳) ۲۰ ۴) ۱۵

۱- اگر دامنه تعریف تابع $f(x)=\sqrt{(3-m)x^2+2mx-(m+2)}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد، حدود $m$ کدام است؟

۱) $m\in[-6,-3]$ ۲) $m\in(-\infty,3)$ ۳) $m\in(-\infty,-6]$ ۴) $m\in(6,+\infty)$

۲- در مجموعه جواب نامعادلهٔ $-4<\frac{3x+1}{x-2}<2$ چند عدد صحیح یافت می‌شود؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۶

۳- جدول تعیین علامت $P(x)=(2a-6)x^2+(3a-12)x+b$ به صورت مقابل است. مقدار $2b-3a$ چه عددی است؟

| x | $-3$ |
|---|---|
| P(x) | + ۰ − |

۱) ۹

۲) $-18$

۳) $-9$

۴) $-27$

۴- اگر معادله $\frac{2x-1}{x}=\frac{x-8}{x^2+2x}-\frac{k}{x+2}$ فقط یک ریشه داشته باشد، چند مقدار مختلف برای $k$ به دست می‌آید؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵- در یک مستطیل به عرض $\sqrt{5}$، طول ۳ برابر عرض است. مقدار $k$ را به عرض مستطیل اضافه کرده و $k$ واحد از طول آن کم می‌کنیم. مستطیل به مستطیل طلایی تبدیل می‌شود. حداقل مقدار $k$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}+3}$ ۲) $\frac{5(\sqrt{5}-1)}{3+\sqrt{5}}$ ۳) $\frac{3(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}+5}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{5+\sqrt{3}}$

۶- دو فرد $A$ و $B$ با هم کاری را در طی ۱۵ روز تمام می‌کنند. پس از ۶ روز کار مشترک، $A$ را حذف می‌کنیم و $B$ به تنهایی در ۱۵ روز تمام کار را به پایان می‌رساند. اگر بعد از ۶ روز کار مشترک، $B$ را حذف می‌کردیم، $A$ به تنهایی مابقی کار را چند روزه تمام می‌کرد؟

۱) ۳۲/۵ ۲) ۳۷/۵ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۲۷/۵

۷- ۴۰۰ کیلوگرم آب‌نمک با غلظت ۲۵ درصد را با ۸۰ کیلوگرم نمک خالص در یک ظرف می‌ریزیم. چقدر به آب آن اضافه کنیم تا غلظت محلول نهایی ۱۰ درصد شود؟

۱) ۴۸۰ ۲) ۱۸۰۰ ۳) ۱۳۲۰ ۴) ۱۵۶۰

۸- معادله $x^{۲} = \sqrt{۱+x} + ۱$ دارای چند جواب است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

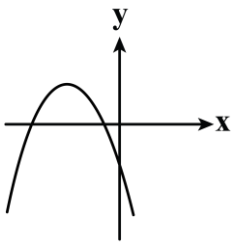
۹- جواب معادلهٔ $\sqrt{x} + \sqrt{x-a} = a$ یک عدد طبیعی دو رقمی است. حداقل مقدار طبیعی $a$ چه عددی است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۱۰- اگر معادلهٔ $\sqrt{ax + \sqrt{۲-x}} = \sqrt{x-۲} + \sqrt{۴x+۱}$ دارای جواب باشد، مقدار $a$ کدام است؟

۱) ۲/۲۵ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۴/۵

۱- نمودار سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ به شکل مقابل است. کدام گزینه همواره مثبت است؟




۱) $ab+c$

۲) $ac-b$

۳) $a(bc-۱)$

۴) $abc+۱$

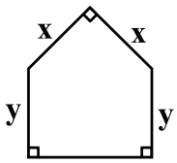
۲- اگر $\alpha$ و $\beta$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۴=۰$ باشند، حاصل $A=\frac{\alpha}{\beta(۲-\alpha)}+\frac{\beta}{\alpha(۲-\beta)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳- $\alpha$ و $۳\beta$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-ax-b=۰$، ۳ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+ax-۱۸=۰$ می‌باشند. مقدار $\frac{b}{\alpha}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۴- پنجره‌ای مطابق شکل با بیشترین نوردهی می‌خواهیم بسازیم. اگر محیط پنجره ۱۶ باشد، مقدار $x$ کدام است؟




۱) $\frac{۸\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+۱}$

۲) $\frac{۸\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}+۱}$

۳) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}+۱}$

۴) $\frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+۱}$

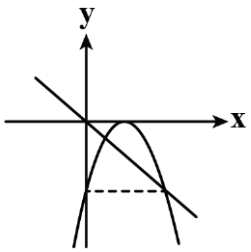
۵- اگر $\alpha$ و $\beta$ صفرهای سهمی $f(x)=-۲x^۲+۳x+۲$ باشند، مقدار $\frac{\alpha^۴-\beta^۲}{۲۱\alpha}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

۶- هرگاه $a$ و $\alpha$ ریشه‌های $x^۲+۲x+۶m=۰$ و $b$ و $\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-x+۳m=۰$ باشند و $m\neq۰$ باشد، مقدار $a^۲+b^۲$ چه عددی است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۲۸ ۴) ۵۲

۷- نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ و خط $y=-6x$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\frac{b}{ac}$ چه عددی است؟




۱) $\frac{1}{8}$

۲) $\frac{1}{6}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) $\frac{1}{3}$

۸- اگر $\alpha$ و $\beta$ جواب‌های $x^2-16x+4=0$ باشند، مقدار عبارت $\sqrt{\frac{\alpha^2+4}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta^2+4}{\alpha}}$ چه عددی است؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

سنجش کلاد

۱- حاصل عبارت $A=\sqrt[12]{2}\times\sqrt[3]{3\sqrt{12}}\times\sqrt[4]{6}\times\sqrt[6]{108}$ کدام است؟

۱) $12\sqrt[3]{4}$ ۲) $12\sqrt[4]{3}$ ۳) $6\sqrt[3]{4}$ ۴) $6\sqrt[4]{3}$

۲- در تجزیهٔ عبارت $(2x-3)(4x^2-12x+9)-27$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $x-1$ ۲) $x-2$ ۳) $x-3$ ۴) $x-4$

۳- حاصل عبارت $A=\frac{27-2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}-4\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۳ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۴- اگر $x^2-9x+1=0$ باشد، حاصل $x^3+\frac{1}{x^3}$ کدام است؟

۱) ۶۸۲ ۲) ۷۱۲ ۳) ۶۹۲ ۴) ۷۰۲

۵- حاصل عبارت $A=(\sqrt{10-2\sqrt{14}})(\sqrt{5+\sqrt{11}}+\sqrt{5-\sqrt{11}})$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{14}$ ۲) $2\sqrt{11}$ ۳) $4\sqrt{14}$ ۴) $4\sqrt{11}$

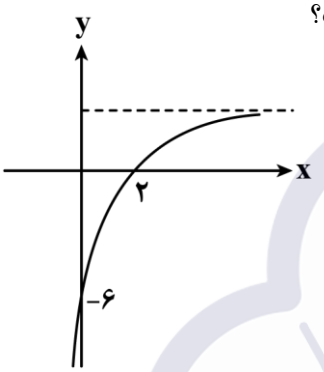
۱- با فرض $\log_5^3 \simeq ۰/۶۸$ و $\log_2^5 \simeq ۲/۴$، مقدار تقریبی $\log ۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۷}{۱۰۰}$ ۲) $\frac{۴۷}{۱۰۰}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۲۵}$

۲- اگر $(\log_2^{۴x})\times(\log_{۴}^{\frac{x}{۴}}) = ۵$ باشد، مقدار $\log_2^{۴x}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $-۱$ ۲) $-۲$ ۳) ۳ ۴) ۴

۳- نمودار تابع $f(x)=۲-۲^{bx+c}$ به صورت مقابل است. مقدار $f^{-1}(-۲۲)$ کدام است؟




۱) $-\log_۳^۲$

۲) $-\log_۲^۳$

۳) $-۲\log_۲^۳$

۴) $-۲\log_۳^۲$

۴- معادلهٔ $\log_2^{(x^۲-۲x+۴)} + \log_2^{|x+۲|} = ۳$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵- نمودار تابع $f(x)=۲^{x+k}-۲^{x+۲}+۲^k$ در شکل مقابل رسم شده است. حدود $k$ کدام است؟



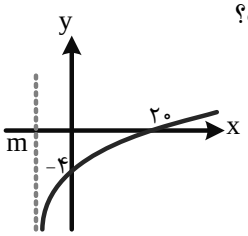

۱) $k<۲$

۲) $k>۲$

۳) $۱<k<۲$

۴) $۰<k<۲$

۶- نمودار تابع $f(x)=\log_a^{(۳x+b)}-c$ در شکل مقابل، رسم شده است. مقدار $m$ کدام است؟




۱) $\frac{۲۰}{۱-a^۴}$ ۲) $\frac{۳۰}{۱-a}$ ۳) $\frac{۶۰}{۱-a^۴}$ ۴) $\frac{۲۰}{۱-a}$

۷- جرم نوعی مادهٔ رادیواکتیو هر ۲۰ سال دو سوم برابر می‌شود. اگر ۳۰۰ گرم از این ماده موجود باشد، پس از حداقل چند سال جرم آن کمتر از ۱۰ گرم می‌شود؟ $(\log ۳ \simeq ۰/۵ \, , \log ۲ \simeq ۰/۳)$

۱) ۱۵۱ ۲) ۷۶ ۳) ۳۰۱ ۴) ۱۷۶

۸- نمودار تابع $f(x)=\log_{۲}^{(x+۱)}$ در دو نقطه نمودار تابع $g(x)=۲^{x}-۱$ را قطع می‌کند. فاصلهٔ این دو نقطه از یکدیگر چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۹- کدام عدد بزرگ‌تر است؟

۱) $\log_{۲}^{۵}$ ۲) $\log_{۴}^{۲۴}$ ۳) $\log_{۸}^{۶۳}$ ۴) ۲

۱۰- اگر $\alpha$ جواب غیرصفر معادلهٔ $۲^{x^{۳}}=۳^{x^{۲}}$ باشد، مقدار $۳^{۲^{\alpha}}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲۷ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt[۳]{۳}$

۱۱- معادلهٔ $\log_{۴}^{x}+m\log_{x}^{۸}=۲$ جواب ندارد. مجموعهٔ مقادیر ممکن $m$ کدام است؟

۱) $(\frac{۳}{۲},+\infty)$ ۲) $(\frac{۳}{۴},+\infty)$ ۳) $(\frac{۴}{۳},+\infty)$ ۴) $(\frac{۲}{۳},+\infty)$

۱۲- اگر $\log_{۶}^{۴}=a$، مقدار $\log_{۸}^{۱۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{a+۲}{۳a}$ ۲) $\frac{a+۱}{۲a}$ ۳) $\frac{a+۳}{۳a}$ ۴) $\frac{a+۲}{۲a}$

۱۳- حاصل عبارت $A=\frac{\log_{۲}^{۳}+۱}{\log_{۳}^{۵}\log_{۲}^{۶}}$ کدام است؟

۱) $\log_{۶}^{۱۵}$ ۲) $\log_{۲}^{۱۵}$ ۳) $\log_{۳}^{۵}$ ۴) $\log_{۵}^{۳}$

۱- اگر $n(A\cup B)=۳۳$ باشد و $n(A-B)$ و $n(A\cap B)$ و $n(B-A)$ به ترتیب جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۳ باشند، مجموعهٔ $A$ چند عضو دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۱ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۲- ۴۰ نفر وارد یک باشگاه ورزشی شده‌اند که دارای ۲ دستگاه $A$ و $B$ است. اگر تعداد افرادی که از هیچ دستگاهی استفاده نکرده‌اند، ۱۰ واحد کمتر از کسانی که از دستگاه $A$ استفاده نکرده‌اند و ۱۸ واحد کمتر از کسانی که از دستگاه $B$ استفاده نکرده‌اند، باشد، حداکثر چند نفر از هر دو دستگاه استفاده کرده‌اند؟ مشابه تمرین کتاب درسی

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۳- ۵۳۱ سکه را بین ۹ نفر طوری تقسیم کرده‌ایم که تعداد سهم‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند. اگر افراد به ترتیب تعداد سهم در یک صف قرار گیرند، نفر نهم ۱۱۱ سکه دارد. نفر هفتم چند سکه دارد؟

۱) ۸۵ ۲) ۸۶ ۳) ۸۷ ۴) ۸۸

۴- $a_n$ یک الگوی خطی و $b_n$ یک دنبالهٔ حسابی است. اگر $b_۱$ یک واحد بیشتر از $a_۱$ و $b_۴$ دو واحد کمتر از $a_۴$ باشد، $b_۲-a_۲$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۵- دنبالهٔ $a_n:a,b,c$ یک دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ $b_n:b-a,b,a+b$ یک دنبالهٔ هندسی است. مجموع جملات دنبالهٔ حسابی برابر ۶ است. حاصل‌ضرب جملات دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۲۴

۶- در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ پنجم مربع جملهٔ دوم بوده و جملهٔ هفتم ۶ واحد بیشتر از جملهٔ سوم است. جملهٔ نهم چند واحد بیشتر از جملهٔ پنجم است؟

۱) ۶ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt[۴]{۳}$ ۴) $۶\sqrt[۴]{۲۷}$

۷- جملات اول، ششم و چهار برابر جملهٔ نهم در یک دنبالهٔ حسابی با جملات مثبت به ترتیب جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی هستند. جملهٔ دوم دنبالهٔ حسابی چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۸- اگر $A$ و $B$ دو مجموعه و $n(A\cap B')=n(B)=۴n(A\cap B)$ و $n(A\cup B)=۲۴$ باشد، تعداد اعضای مجموعهٔ $B-A$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۹- در دنبالهٔ حسابی $a_n$ با فرض $a_۱+a_۲+a_۳=۱۸$ و $a_۲a_۳=۴۸$، واسطهٔ هندسی جملات اول و هفتم این دنباله کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

**۱- هرگاه در داده‌های ۴,۳,۶,۲,۵,۴,۶,۷,۴,۹,۸ اعداد بزرگ‌تر از چارک سوم و اعداد کوچک‌تر از چارک اول را حذف کنیم، میانگین اعداد مانده چه عددی است؟**

۱) $\frac{۳۴}{۷}$ ۲) ۵/۵ ۳) ۵/۲۵ ۴) $\frac{۳۶}{۷}$

**۲- میانگین اعداد $a+۶, a+۴, a+۲, a$ با واریانس آن‌ها برابر می‌باشد. مقدار $a$ کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

**۳- کدام دسته از متغیرها به ترتیب، کمی گسسته، کیفی اسمی و کیفی ترتیبی است؟**

۱) شاخص تودهٔ بدن، گروه خونی، جنسیت

۲) تعداد تماشاگرهای یک مسابقه، گروه خونی، قد افراد

۳) تعداد شهرهای یک استان، نژاد افراد، سطح تحصیلات

۴) وزن افراد، مراحل رشد یک انسان، میزان بارندگی

**۴- واریانس اعداد طبیعی و یک رقمی فرد چند برابر واریانس اعداد طبیعی و یک رقمی زوج است؟**

۱) ۱/۶ ۲) ۰/۶۲۵ ۳) ۱/۲ ۴) ۰/۷۲

**۵- اگر از مجموعهٔ $A=\{۲,۴,۶,۸,...,۹۶,۹۸\}$ سه عدد زوج متوالی انتخاب کنیم، کم‌ترین مقدار ضریب تغییرات چه عددی است؟**

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۷۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲۸۸}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۱۴۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲۴}$

**۶- در چهار داده آماری، میانگین برابر ۳ و واریانس برابر ۲/۵است. اگر ۶ داده برابر میانگین به آن‌ها اضافه کنیم، واریانس ۱۰ دادهٔ به دست آمده، چه عددی است؟**

۱) $\frac{۶}{۱۰}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۴}{۱۰}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

**۷- هشت دادهٔ آماری با میانگین ۶ وجود دارد به طوری‌که میانگین مربع آن‌ها ۵۲ می‌باشد. ضریب تغییرات این هشت عدد کدام است؟**

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱- خط $d$ موازی نیمساز ناحیه اول و سوم مختصات بوده و نیمساز ناحیه دوم را در نقطه‌ای به طول $x=-۳$ قطع می‌کند. مساحت ناحیه محدود به این خط و محورهای مختصات در ناحیه دوم چقدر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۲- مثلث $ABC$ با رأس‌های $A(۳,۵)$، $B(۲,۲)$ و $C(۵,-۱)$ را در نظر بگیرید. اندازهٔ ارتفاع وارد بر ضلع $BC$ در این مثلث چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

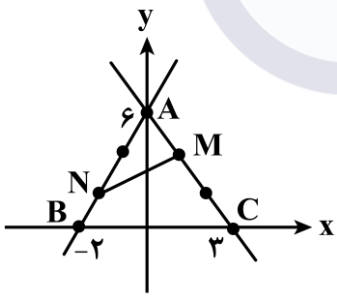
۴- دو ضلع یک مستطیل بر دو خط به معادلات $۳x+۴y=۱۰$ و $۴x-۳y=۵$ قرار دارند. اگر $A(۳,-۱)$ یک رأس این مستطیل باشد، محیط مستطیل کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۵- نقاط $A(۱,۱)$، $B(a,b)$ و $C(-۲,۰)$ سه رأس مربع $ABCD$ هستند. مجموع مقادیر ممکن برای $a$ کدام است؟

۱) $-۲$ ۲) $-۱$ ۳) $-۳$ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

۶- در شکل مقابل، $\frac{MC}{AM}=\frac{AN}{BN}=۲$ است. شیب پاره‌خط $MN$ کدام است؟




۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۴}{۵}$
۳) $\frac{۶}{۷}$
۴) $\frac{۵}{۶}$

۷- فاصلهٔ کدام نقطه از سه رأس مثلث $ABC$ همواره یکسان است؟

۱) تلاقی سه میانه ۲) تلاقی سه ارتفاع
۳) تلاقی سه نیمساز ۴) تلاقی سه عمودمنصف

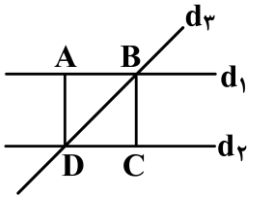
۸- نقاط A و B در یک طرف خط d واقع بوده و همگی در یک صفحه قرار دارند. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از A و B به یک فاصله باشد؟

۱) یک ۲) دو ۳) یک یا هیچ ۴) یک یا بی‌شمار

۹- مثلث ABC در رأس A قائمه است. چند نقطه روی اضلاع مثلث وجود دارد که از رأس A و وتر BC به یک فاصله باشد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۱۰- در شکل مقابل، ABCD مربع است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از هر سه خط $d_1$، $d_2$ و $d_3$ به یک فاصله باشد؟




۱) یک
۲) دو
۳) سه
۴) چهار

۱۱- نقاط $A(۲,-۱)$ و $B(۰,۲)$ مفروضند. معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $۲x-۳y=\frac{۱}{۲}$ ۲) $۲x-۳y=-\frac{۱}{۲}$

۳) $۲x+۳y=\frac{۱}{۲}$ ۴) $۲x+۳y=-\frac{۱}{۲}$

۱۲- فاصلهٔ نقطهٔ $A(a,۲)$ واقع در ناحیهٔ دوم مختصات، از خط $۳x-۴y=۱$ برابر ۳ است. فاصلهٔ A از مبدأ مختصات چقدر است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۱۷}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۱۷}$

۱۳- نقاط $A(۱,۲)$ و $B(-۲,۳)$ و $C(-۳,۰)$ رئوس متوازی‌الاضلاع ABCD می‌باشند. کدام نقطه بر خطی که از رأس D عبور کرده و با قطر AC موازی است، قرار دارد؟

۱) $(۲,۳)$ ۲) $(۲,۲)$ ۳) $(۲,۰)$ ۴) $(۲,۱)$

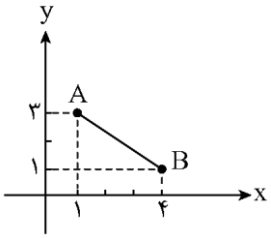
۱۴- دو ضلع مربعی بر خطوط $\frac{x}{۲}+\frac{۲y}{۳}=۱$ و $\frac{x}{۴}+\frac{y}{۳}=۱$ قرار دارند. طول ضلع مربع چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۶}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱۲}{۵}$

۱۵- نقطهٔ برخورد دو قطر یک مربع به معادلات $۲x+۳y=۰$ و $ax+۲y=۱۳$ بر روی دایره‌ای به مرکز $A(۳,-۲)$ قرار دارد. مساحت این دایره کدام است؟

۱) $۵۰\pi$ ۲) $۵۲\pi$ ۳) $۵۴\pi$ ۴) $۵۶\pi$

۱۶- **AB یکی از اضلاع مربع ABCD است. اگر رأس C در ناحیهٔ چهارم واقع باشد، مجموع مختصات رأس D کدام است؟**




۱) صفر

۲) ۱

۳) -۱

۴) -۲

۱۷- **اگر $A(-۲,a)$ و $B(۰,۱)$ و $C(۲,۰)$ رئوس مثلث ABC به مساحت ۶ باشند، a کدام می‌تواند باشد؟**

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۵ ۴) -۱

۱۸- **نقطهٔ $A(۳,-۱)$ یکی از رئوس مستطیلی است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $x-۲y=۱$ و $۲x+y=۲$ می‌باشد. کمترین فاصلهٔ وسط قطر از اضلاع کدام است؟**

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ ۲) $\frac{۳}{\sqrt{۵}}$ ۳) $\frac{۴}{\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{۳}{۲\sqrt{۵}}$

۱۹- **قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,۳)$ نسبت به نقطهٔ $B(۳,۲)$ کدام است؟** آز مون وی ای پی

۱) $(۱,۱)$ ۲) $(۱,۴)$ ۳) $(۴,۱)$ ۴) $(۴,۴)$

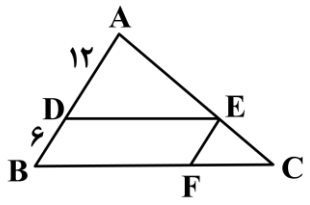
۲۰- **خط $۲x-y=۵$ بر دایره‌ای به مرکز $O(a,۲a)$ مماس است. مساحت دایره چقدر است؟**

۱) $۵\pi$ ۲) $\frac{\pi}{۵}$ ۳) $۲۵\pi$ ۴) $\frac{\pi}{۲۵}$

۱- اگر $\frac{a+2b}{a-3b}=m$ باشد، حاصل $\frac{a-3b}{5b}$ برحسب $m$ کدام است؟ $(ab\neq 0)$

۱) $\frac{2}{m+1}$ ۲) $\frac{1}{m+1}$ ۳) $\frac{2}{m-1}$ ۴) $\frac{1}{m-1}$

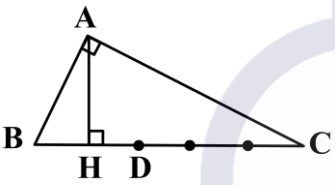
۲- در شکل مقابل، چهارضلعی $BDEF$ متوازی‌الاضلاع است. مساحت این چهارضلعی چه کسری از مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است؟




۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{9}$

۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{4}{9}$

۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل مقابل، نقطهٔ $D$ پاره‌خط $CH$ را به نسبت یک به سه تقسیم کرده است. اگر $AB=12$ و $AC=16$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ $D$ از $AC$ چقدر است؟




۱) ۶/۹۶

۲) ۵/۷۶

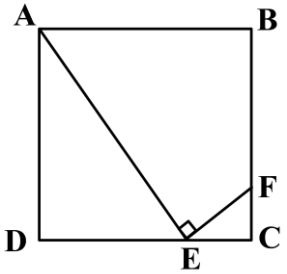
۳) ۵/۴۸

۴) ۶/۵۴

۴- فرض کنید $AB=12$ طول مستطیل $ABCD$ باشد. از نقطهٔ $A$ عمودی بر قطر $BD$ رسم می‌کنیم و پای این عمود را $H$ می‌نامیم. اگر طول $BH$ برابر ۹ باشد، اندازهٔ عرض مستطیل کدام است؟

۱) $4\sqrt{7}$ ۲) $6\sqrt{3}$ ۳) $8\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{6}$

۵- در مربع شکل مقابل، اندازهٔ $AE$، چهار برابر اندازهٔ $EF$ است. نسبت ضلع مربع به $EF$ کدام است؟



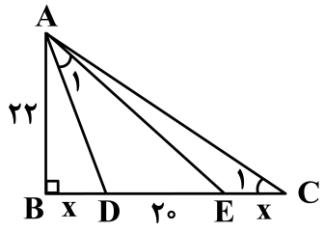

۱) ۳/۸

۲) ۳/۶

۳) ۳/۲

۴) ۳/۴

۶- در شکل زیر، $\hat{C}_1 = \hat{A}_1$ است. مقدار x کدام می‌تواند باشد؟



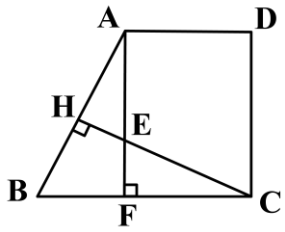

۱) ۶

۲) ۴

۳) ۸

۴) ۵

۷- در ذوزنقهٔ شکل مقابل، $BC = ۷$، $BF = ۳$ و $AE = ۴$ است. اندازهٔ AF کدام است؟



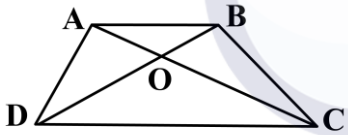

۱) ۵

۲) ۶

۳) $\frac{۲۰}{۳}$

۴) $\frac{۱۷}{۳}$

۸- در ذوزنقهٔ شکل مقابل، مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ODC}$، ۹ برابر مساحت مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ است. مساحت مثلث $\overset{\triangle}{OBC}$ چه کسری از مساحت ذوزنقهٔ ABCD است؟




۱) $\frac{۳}{۱۶}$

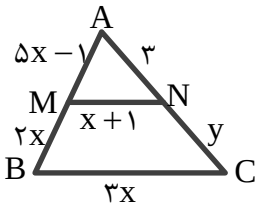
۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۶}$

۴) $\frac{۲}{۱۵}$

۹- در شکل روبه‌رو، پاره‌خط MN به موازات ضلع BC است. مقدار $x-y$ چه عددی است؟

مشابه تمرین کتاب درسی



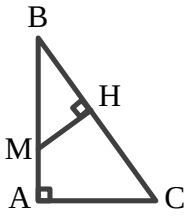

۱) $-\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۱

۱۰- در شکل مقابل، $BM = HC$ و $AM = \frac{۵}{۴}$ و $BH = ۳$، اندازه $MH$ کدام است؟



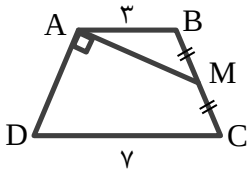

۱) ۵

۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۷}$

۴) $۲\sqrt{۷}$

۱۱- در ذوزنقه مقابل $M$ وسط ضلع $BC$ است به طوری که $AM = ۴$، مساحت ذوزنقه چه عددی است؟



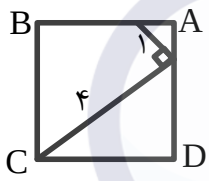

۱) ۲۴

۲) ۲۰

۳) ۱۸

۴) ۲۵

۱۲- در شکل مقابل، مساحت مربع چه عددی است؟



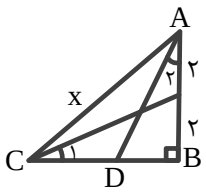

۱) ۱۰/۲۴

۲) ۱۲/۲۱

۳) ۸/۴۱

۴) ۹/۹۶

۱۳- در شکل روبه‌رو $\hat{A}_۲ = \hat{C}_۱$ و $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$، مقدار $x$ کدام است؟




۱) $۴\sqrt{۳}$

۲) $۶\sqrt{۲}$

۳) ۸

۴) ۶

**ریاضی ۱۷ مهر ۱۴۰۴ ماراتون**

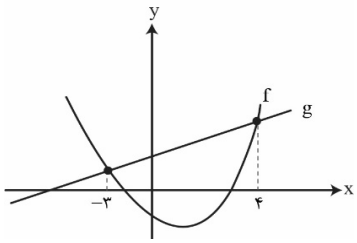
۱- اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $\frac{(۲m+۳)x-۱}{x^۳-x}=\frac{(۲m-۱)x^۲}{x^۲-۱}+\frac{m}{x^۲+x}$ برابر ۲ باشد، آنگاه معادله چند جواب دیگر دارد؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

۲- معادلهٔ $\frac{x+۱}{x-۲}+\frac{x+۲}{x}=\frac{۳}{x-۲}+۵$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳- باتوجه به نمودار توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در شکل مقابل، مجموعه جواب نامعادلهٔ $xf(x)-۲f(x)\le xg(x)-۲g(x)$ کدام است؟




۱) $[-۳,۴]$

۲) $[-۳,۲]\cup[۴,+\infty)$

۳) $(-\infty,-۴]\cup[۲,+\infty)$

۴) $(-\infty-۳]\cup[۲,۴]$

۴- اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{(x-۱)^۲}{x}+x\ge ۱$ برابر با بازهٔ $(a,b]\cup[c,+\infty)$ باشد، مقدار $a-b+c$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۵- مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $-\frac{۱}{۶}<\frac{۱}{x-۱}<-۲$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶- حاصلضرب جواب‌های معادلهٔ $\frac{۱}{۳+\sqrt{x+۹}}+\frac{۱}{۳-\sqrt{x+۹}}=-\frac{x}{۶}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) -۱۸ ۳) -۳۶ ۴) ۶

۷- مجموع جواب‌های حقیقی معادلهٔ $\sqrt{x^۲+x+۱}=۱-x-x^۲$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

۸- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{۱}{|x+۱|}>\frac{۱}{۲}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹- از تقسیم اندازهٔ قطر یک مستطیل به عرض آن، عدد طلایی حاصل می‌شود. نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲+۲\sqrt{۵}}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳+\sqrt{۵}}}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۱+\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{۲}{۳+\sqrt{۵}}$

۱۰- دو فرد A و B در یک شرکت همکار هستند و در هر ۶ ساعت یک دستگاه کامل تولید می‌کنند. اگر سرعت کار فرد B، ۳برابر فرد A باشد، فرد B بعد از چند ساعت به تنهایی یک دستگاه را تولید می‌کند؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۱- اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله $x^2-4x-1=0$ باشند، حاصل $\frac{\beta}{\alpha+2}+\frac{\alpha}{\beta+2}$ کدام است؟

۱) $\frac{26}{11}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{13}{5}$ ۴) $\frac{5}{11}$

۲- اگر $x_1$ و $x_2$ ریشه‌های حقیقی و متمایز معادله $(2m-3)x^2-2mx+m-2=0$ باشند و $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<1$، آنگاه مقادیر m شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳- مجموع ریشه‌های حقیقی معادله درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ برابر با ۲ است. اگر رابطهٔ $a-b+c=0$ بین ضرایب معادله برقرار باشد، مقدار $\frac{c}{a}$ کدام است؟

۱) $-1$ ۲) $-2$ ۳) $-3$ ۴) $-4$

۴- اگر $x_1$ و $x_2$ ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $2x^2-4x+m=0$ باشند و رابطهٔ $x_1^{x_1+x_2}+x_2^{x_1+x_2}=32$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، حاصل‌ضرب ریشه‌ها کدام است؟

۱) ۷ ۲) $-7$ ۳) ۱۴ ۴) $-14$

۵- اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2-ax+b=0$ برابر $\alpha$ و ۳ و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2+cx+d=0$ برابر $-\alpha$ و ۵ باشد، مقدار $a-c$ کدام است؟

۱) $-2$ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۸

۶- اگر $x_1$ و $x_2$ ریشه‌های معادله درجه‌ی دوم $ax^2-2x+c=0$ باشند و $a<0$ و $ac<a$ آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $x_1<x_2<0$ ۲) $x_1<0<x_2$ , $|x_1|>|x_2|$

۳) $x_1<0<x_2$ , $|x_1|<|x_2|$ ۴) $0<x_1<x_2$

۷- اگر نقطه رأس سهمی $f(x)=x^2-4x+m^2+3$ در ناحیه چهارم دستگاه مختصات باشد، مقادیر m کدام است؟

۱) $|m|>1$ ۲) $|m|<1$ ۳) $m<2$ ۴) $-3<m<2$

۸- در تابع درجه دوم $f(x)=x^2-(a^2-3a+5)x+a^3$ اگر $f(x_1)=f(x_2)=0$ و $x_1=\sqrt{x_2}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{12}{5}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۹- نمودار تابع $f(x)=x^2-9$ و خط‌های $y=7$ و $y=-5$ در چهار نقطه $A,B,C$ و $D$ متقاطع‌اند. مساحت ذوزنقه $ABCD$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۷۲ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

۱۰- نمودار تابع $f(x)=-x^2+6x+7$ محور yها را در نقطهٔ A و محور xها را در نقطهٔ B با طول مثبت قطع می‌کند. اگر نقطه C رأس این سهمی باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۴۲ ۳) ۴۵ ۴) ۸۴

**ریاضی ۱۵ آبان ۱۴۰۴ ماراتون**

۱- به ازای چند مقدار صحیح $x$، رابطه‌ی $\sqrt{۶}<\sqrt[۳]{x}<\sqrt[۶]{۳۰۰}$ برقرار است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲- اگر $x^۳-۳x^۲+۳x+۷=(x+۱)(ax^۲+bx+c)$ باشد، مقدار $\frac{a}{c}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $-\frac{۴}{۷}$ ۴) $-\frac{۷}{۴}$

۳- اگر $x>۰$ ; $f(x)=x+\frac{۱}{x}$ و $f(a^۲)=۲۳$ باشد، مقدار $f(a^۳)$ کدام است؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۵۰

۴- اگر $\sqrt{a}=\sqrt{۲}+۱$ و $\sqrt{b}=\sqrt{۲}-۱$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۵- اگر $\sqrt[۴]{۲^۶\sqrt[۳]{x+۱}}=\sqrt{۲^۳\sqrt{۴\sqrt{۸}}}$ باشد، حاصل $\sqrt{x+۱}$ کدام است؟

۱) ۲۵۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۲۰۵۶

۶- حاصل عبارت $(\sqrt{۳-\sqrt{۵}}+\sqrt{۳+\sqrt{۵}})(\sqrt{۱۴+۶\sqrt{۵}}-\sqrt{۱۴-۶\sqrt{۵}})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۱۰\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

۷- اگر $\sqrt{x-\sqrt{۲}}+\sqrt{x+\sqrt{۲}}=۴$ باشد، حاصل $\sqrt{x+\sqrt{۲}}-\sqrt{x-\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۸- حاصل $\frac{\sqrt[۴]{۵-۲\sqrt[۴]{۳۶}}}{\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}}$ کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۲}$ ۲) $۲-\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$

۹- دو عدد حقیقی $a$ و $b$ را در نظر بگیرید. اگر $۰<a<b$ باشد و $x=\sqrt{a+b-\sqrt{۴ab}}$ و $y=۴a+۴b+\sqrt{۶۴ab}$ باشد، حاصل $\frac{۲x+\sqrt{y}}{\sqrt{y}-۲x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{ab}$ ۲) $ab$ ۳) $\frac{b}{a}$ ۴) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

۱۰- اگر $x=\frac{\sqrt[۳]{۳}+\sqrt{۳}}{\sqrt[۶]{۳}+\sqrt[۳]{۳}}$ و $y=\sqrt[۳]{۳-\sqrt{۱۰}}\times\sqrt[۶]{۱۹+۶\sqrt{۱۰}}$ باشد، مقدار $x^۶+y$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

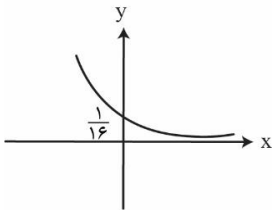
۱- اگر $f(x)=(\frac{m^۲-m-۶}{۳m^۲+۵m-۲})^x$ تابعی نمایی باشد، حدود $m$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲- اگر مجموعهٔ جواب نامعادله‌ی $(\sqrt{۲}-۱)^{۲x^۲}>(۵\sqrt{۲}+۷)^{۳-۳x}$، بازه‌ی $(a,b)$ باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۳- توابع $f(x)=(۴a^۲-۱)x^۲+(۱-۲a)x+b$ و $g(x)=(a+۱)^x$ مفروض است. اگر نمودار تابع نمایی $gof(x)$ به صورت زیر باشد، مقدار $f(ab)$ کدام است؟




۱) ۱ ۳) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

۴- اگر $\log_{۱۸}۵۴=\frac{k+۲}{k+۱}$ باشد، حاصل $\log_۳ ۱۲$ کدام است؟

۱) $k+۱$ ۲) $۲k-۱$ ۳) $k$ ۴) $۲k-۲$

۵- اگر $\frac{\log_۲ ۳+\log_۵ ۳}{\log_۲ ۳\times\log_۵ ۳}=a$ باشد، حاصل $\frac{۱}{۱+\log_۵ ۶}+\frac{۱}{۱+\log_۲ ۱۵}$ بر حسب $a$ کدام است؟

۱) $\frac{a+۱}{a}$ ۲) $\frac{a}{a+۱}$ ۳) $\frac{۱}{a-۱}$ ۴) $\frac{a-۱}{a}$

۶- اگر $\log_۸ ۵=a$ و $\log_۴ ۳=b$ باشد، مقدار $\log_{۱۵} ۹$ کدام است؟

۱) $\frac{۲b}{۲b+۳a}$ ۲) $\frac{۴a}{۲a+۳b}$ ۳) $\frac{۴b}{۲b+۳a}$ ۴) $\frac{۲a}{۲a+۳b}$

۷- اگر $\log_x ۹=\log_۳ x^۳\times\log_x(۳x)$ باشد، حاصل $\log_{(x-۳)} ۴x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

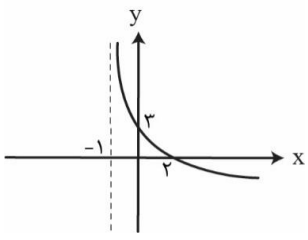
۸- مجموعه جواب نامعادله‌ی $\log_۲(x-۱)\times\log_۲(۶-x)>۰$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹- اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=\log_x|۱-x^۲|$ به صورت $(a,b)\cup(c,+\infty)$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰- نمودار تابع $f(x)=\log_a(bx+c)$ به صورت مقابل است. مقدار $\frac{a^۳}{bc}$ کدام است؟




۱) $\frac{۱}{۹}$ ۳) ۹
۲) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

## ریاضی ۱۳ آذر ۱۴۰۴ ماراتون

۱- اگر مجموعه‌ی $A=[m+1,m^2]\cap[9,15-m]$ مجموعه‌ی تک‌عضوی باشد، مجموع اعداد صحیح مجموعه‌ی $B=(-m^2,3m)$ کدام است؟ $(m\in\mathbb{N})$

۱) صفر ۲) ۴۵ ۳) ۳ ۴) ۸۱

۲- در یک نظرسنجی ۹۰ نفره، در مورد علاقه‌مندی به نوشیدنی چای و قهوه، ۴۶ نفر علاقه‌مند به نوشیدن فقط چای و ۱۲ نفر علاقه‌مند به نوشیدن فقط قهوه هستند. اگر تعداد علاقه‌مندان به چای ۳ برابر علاقه‌مندان به قهوه باشند، آن‌گاه چند نفر به هیچ‌کدام علاقه‌مند نیستند؟

۱) ۱۷ ۲) ۳ ۳) ۲۷ ۴) ۲۲

۳- اگر $n(A-B)=5-x$ و $n(B-A)=2x-7$ و $n(A\cap B)=x-2$ و $n(A)=n(B)$ باشد، $n(A\cap B)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۴- اگر جملات سوم و هفتم و سیزدهم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب از راست به چپ برابر با $2x$ و $3x+2$ و $8x-2$ باشد، جمله‌ی $a_{2x}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۸

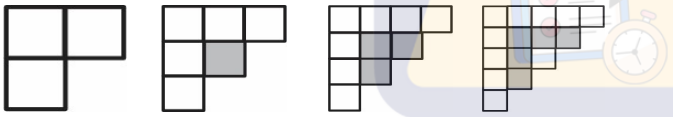
۵- بین دو عدد ۱۵ و ۶۹، هشت واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم به گونه‌ای که ۱۰ جمله تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند. مجموع چهار جمله‌ی اول دنباله چند برابر مجموع چهار جمله‌ی دوم دنباله است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{2}$

۶- به ازای چند عدد صحیح و بزرگ‌تر از منفی یازده $m$، اشتراک دو بازه‌ی $A=[\frac{m}{2},+\infty)$ و $B=(-\infty,\frac{m^2+3m+2}{m+11})$ هیچ عدد صحیحی را شامل نمی‌شود؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۷ ۴) ۵

۷- با توجه به الگوی داده شده نسبت مربع‌های سفید به رنگی در شکل بیستم کدام است؟



۱) $\frac{194}{39}$ ۲) $\frac{194}{37}$ ۳) $\frac{193}{37}$ ۴) $\frac{193}{39}$

۸- در دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی عمومی $a_n$ و قدرنسبت $r$، اگر $a_1=3+r$ و $a_8=a_6+72a_4$ باشد، جمله‌ی اول کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

۹- اعضای مجموعه‌ی $\{2,4,a\}$ سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی با جملات مثبت هستند. حاصل‌ضرب مقادیر مختلف برای $a$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) $16\sqrt{2}$ ۳) $8\sqrt{2}$ ۴) ۱۶

۱۰- جملات اول و سوم و چهارم یک دنباله‌ی هندسی غیرثابت با جملات مثبت تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. قدرنسبت دنباله‌ی حسابی به جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی کدام است؟

۱) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ۳) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ۴) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

۱- چه تعداد از متغیرهای زیر کیفی نیست؟

الف) وضعیت تأهل افراد

ب) مقاومت یک سیم

پ) نوع تلفن مورد استفاده

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲- میانگین داده‌های $x_{۱۷},....,x_۳,x_۲,x_۱$ برابر ۷ است. اگر میانگین داده‌های شمارهٔ فرد برای ۵ باشد، میانگین داده‌های شمارهٔ زوج کدام است؟

۱) ۸/۸ ۲) ۹/۲۵ ۳) ۹/۵ ۴) ۱۰

۳- مقادیر اختلاف تعدادی دادهٔ آماری از میانگین آن‌ها به صورت زیر است. مقدار $x$ چقدر است؟

$-۴,-۴,-۲,-۲,-۲,-۱,-۱,x,x,x,۵,۵$ :اختلاف داده‌ها از میانگین

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴- میانگین داده‌های $۳,x,y,۹,z$ برابر ۷ است. اگر داده‌های $۲z+۳$، $۲y+۵$ و $۲x-۱$ به این داده‌ها اضافه شود، میانگین داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹/۵ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۵- میانهٔ تعدادی داده آماری برابر ۳/۵ است. مجموع میانگین داده‌های کوچک‌تر از میانه و میانگین داده‌های بزرگ‌تر از میانه برابر ۷ است. اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، میانگین داده‌ها کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

۶- نمرات درس زیست‌شناسی دانش‌آموزی در ۱۰ آزمون به صورت ۱۱، ۲۰، ۱۵، ۱۶، ۱۵، ۱۴، ۹، ۱۵، ۱۲، ۱۴ می‌باشد. با حذف دو نمرهٔ کم‌ترین و بیشترین آن‌ها، مقدار انحراف معیار تقریباً کدام است؟

۱) ۰/۹ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۴ ۴) ۱/۶

۷- اعداد طبیعی زوج را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد. یعنی $\{۲\},\{۴,۶\},\{۸,۱۰,۱۲\},...$، در این صورت واریانس جملات دستهٔ هفتم کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۸- در ۱۷ دادهٔ آماری، میانگین داده‌های قبل از چارک اول برابر میانگین داده‌های بعد از چارک سوم است. اگر داده‌های ۲۵، ۱۲، ۸ به آن‌ها اضافه شود، میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند. واریانس داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۷/۳ ۲) ۷/۹ ۳) ۸/۱ ۴) ۸/۴

۹- میانگین سه دادهٔ $x_۳$، $x_۲$، $x_۱$ برابر ۵ است. اگر دادهٔ ۱ را به آن‌ها اضافه کنیم، ضریب تغییرات چهار دادهٔ جدید ۲/۵ برابر ضریب تغییرات داده‌های اولیه می‌شود. واریانس داده‌های جدید چند برابر واریانس داده‌های اولیه است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۴

۱۰- در یک شرکت طراحی داخلی، دو گروه از کارآموزان مشغول‌اند. گروه A مسئول اندازه‌گیری طول و عرض اتاق‌ها است و گروه B مسئول اندازه‌گیری ارتفاع سقف‌هاست. مدیر پروژه می‌خواهد بداند کدام گروه دقت کاری بیشتری دارد. برای همین از هر گروه می‌خواهد چندین بار یک اتاق مشخص را اندازه‌گیری کنند. اعداد حاصل به صورت مقابل است. دقت عمل کدام گروه بیشتر است؟

A: ۲۲,۲۳,۲۴,۲۷,۲۹

B: ۲۱,۲۴,۲۵,۲۷,۲۸

۱) A ۲) B ۳) یکسان ۴) غیرقابل بررسی

**۱ - ابتدا قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۴,-۱)$ را نسبت به نقطه‌ی $M(۲,۳)$ به دست آورده و آن را $A_۱$ می‌نامیم. قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به مبدأ مختصات را نیز $A_۲$ می‌نامیم. طول پاره‌خط $A_۱A_۲$ کدام است؟**

۱) $\sqrt{۱۳}$ ۲) $۲\sqrt{۱۳}$ ۳) $۳\sqrt{۱۳}$ ۴) $۴\sqrt{۱۳}$

**۲ - اگر رئوس مثلث ABC به صورت $A(۱,۹)$، $B(۳,۳)$ و $C(۷,۱۱)$ باشند، طول ارتفاع AH کدام است؟**

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

**۳ - نقاط $A(-۲,۳)$، $B(۲,۰)$ و $C(۵,۴)$ رئوس یک مثلث‌اند. نوع مثلث ABC کدام است؟**

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الساقین ۳) متساوی‌الاضلاع ۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

**۴ - مساحت ناحیهٔ محدود بین دو خط $x-۲y-۴=۰$ و $۳x-۲y-۱۸=۰$ در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات کدام است؟**

۱) ۲۳ ۲) ۲۷ ۳) ۴۰ ۴) ۲۰

**۵ - خط d محورهای مختصات را در دو نقطهٔ $(۰,۳)$ و $(-۴,۰)$ قطع می‌کند. قرینهٔ نقطهٔ $A(۱,۵)$ نسبت به خط d کدام است؟**

۱) $(۲/۲,۳)$ ۲) $(۲,۳/۴)$ ۳) $(۲/۲,۳/۴)$ ۴) $(۲,۲/۲)$

**۶ - نقطهٔ $A(۲,۳)$ را نسبت به خط $y=۲$ و نقطهٔ $B(۳,-۱)$ را نسبت به خط $x=۳$ قرینه می‌کنیم تا به ترتیب نقاط $A'$ و $B'$ به دست آیند. سپس نقطهٔ $C(۴,-۱)$ را نسبت به نقطهٔ $P(۲,-۱)$ قرینه می‌کنیم تا به نقطهٔ $C'$ برسیم. مساحت مثلث $A'B'C'$ کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۵

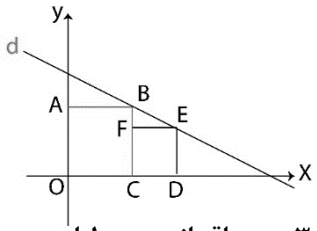
**۷ - دو ضلع مقابل به هم یک مستطیل روی خطوط به معادله $y-ax=۱$ و $ay-x=a-۱$ واقع هستند. اگر قطر مستطیل برابر ۵ و نقطه $(۱,۲)$ یک رأس از مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟**

۱) ۲/۵ ۲) ۳/۵ ۳) $\sqrt{۴۶}$ ۴) $۲\sqrt{۳۴}$

**۸ - اگر $B(۱,۳)$ و $C(۵,-۱)$ دو رأس مثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس A باشند و طول هر ساق $\sqrt{۴۰}$ باشد مجموع طول و عرض نقطه A کدام می‌تواند باشد؟**

۱) $-۴$ ۲) ۴ ۳) ۱۳ ۴) $-۱۲$

**۹ - مطابق شکل، دو مربع در ناحیهٔ اول مختصات قرار گرفته‌اند و رأس B و E روی خط d به معادلهٔ $x+۲y-۱۸=۰$ قرار دارد. فاصلهٔ رأس E از مبدأ مختصات کدام است؟**




۱) $۲\sqrt{۲۹}$
۲) $۶\sqrt{۳}$
۳) ۱۰
۴) ۱۲/۵

**۱۰ - در یک مستطیل، نقاط $A(۵,۲)$ و $C(۴,-۱)$ دو رأس غیرمجاور و دو رأس B و D روی خط $x-۳y=۳$ واقع‌اند، محیط این مستطیل کدام است؟**

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $۱۲\sqrt{۲}$

**ریاضی ۲۴ بهمن ۱۴۰۳ ماراتون**

۱- با حروف کلمه‌ی (دانشجو) و بدون تکرار حروف چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که دو حرف (ج، و) کنار ه باشند و به حرف (ش) ختم نشود؟

۱) ۷۲۰ ۲) ۶۷۲ ۳) ۴۸ ۴) ۲۴

۲- با ارقام $0,1,2,3,4,5$ چند عدد ۳ رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت به طوری که میانگین ارقام با یکی از ارقام برابر باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

۳- با حروف کلمه‌ی «قفسه کتاب» و بدون تکرار حروف، نسبت تعداد کلمات ۸ حرفی که در آنها حروف «ق» و «ف» کنار هم باشند به تعداد کلمات ۶ حرفی که به «کتاب» ختم می‌شوند، برابر با کدام گزینه است؟

۱) $5\times7!$ ۲) $4\times7!$ ۳) $7\times5!$ ۴) $7\times4!$

۴- به $(m\times n!)$ طریق می‌توان ۷ کتاب متمایز را به ۴ نفر هدیه داد به طوری که هر نفر حداقل یک هدیه دریافت می‌کند،اختلاف بین بیشترین و کمترین مقدار $m+n$ کدام است؟ $(m,n\in N)$

۱) ۷۵ ۲) ۴۱۲۷ ۳) ۲۷۹ ۴) ۸۳۲۶

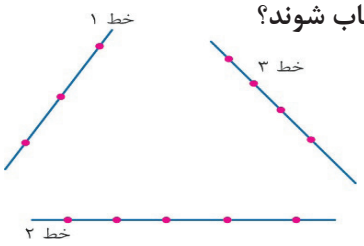
۵- با حروف کلمه‌ی «دفترچه آموزش» چندکلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت به‌طوری که حروف نقطه‌دار و بدون نقطه به صورت یک‌در میان قرار داشته و شروع کلمه با حرف بدون نقطه باشد؟

۱) $5!\times6!$ ۲) $\frac{1}{4}\times5!\times6!$ ۳) $\frac{1}{2}\times5!\times6!$ ۴) $5!\times6!\times2!$

۶- تاسی را ۶ بار پرتاب می‌کنیم، چند عدد ۶ رقمی می‌توان ساخت که یک عدد یک بار، عدد دیگری دو بار و یک عدد دیگر سه بار تکرار شوند؟

۱) ۵۰ ۲) ۹۰ ۳) ۸۰۰۰ ۴) ۷۲۰۰

۷- چند مثلث مختلف می‌توان رسم کرد، به طوری که رئوس آنها از نقاط روی خطوط زیر انتخاب شوند؟




۱) ۲۲۰
۲) ۲۰۵
۳) ۱۱۰
۴) ۵۵

۸- مجموعهٔ $A=\{4,5,6,7,8,9\}$ چند زیر مجموعهٔ حداقل ۳ عضوی دارد که شامل ۴ و فاقد ۵ باشند؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۹- با ارقام $0,1,2,4,5,7$ چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام که مضرب ۵ نباشند، می‌توان نوشت؟

۱) ۴۸ ۲) ۴۰ ۳) ۳۶ ۴) ۳۲

۱۰- علی و حسن و جواد و سه نفر دیگر در صف ورود به قطار هستند. تعداد جایگشت‌های این شش نفر در کدام حالت از بقیه بیشتر است؟

۱) حسن قبل از جواد باشد.
۲) حسن قبل از جواد و بعد از علی باشد.
۳) علی نفر سوم باشد.
۴) حسن نفر آخر نباشد.

۱- فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,a)$ از خط $5x+12y+a+3=0$ برابر ۳ است. مجموع مقادیر ممکن برای $a$ کدام است؟

۱) $-4$ ۲) ۲ ۳) $-2$ ۴) ۴

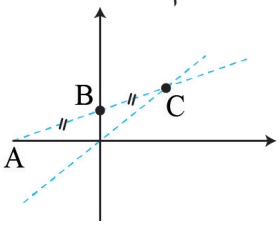
۲- مساحت ناحیهٔ محدود بین دو خط $x-2y-4=0$ و $3x-2y-18=0$ در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۷ ۳) ۴۰ ۴) ۲۰

۳- خط $d$ محورهای مختصات را در دو نقطهٔ $(0,3)$ و $(-4,0)$ قطع می‌کند. قرینهٔ نقطهٔ $A(1,5)$ نسبت به خط $d$ کدام است؟

۱) $(2/3,2)$ ۲) $(2,3/4)$ ۳) $(2/2,3/4)$ ۴) $(2,2/2)$

۴- مطابق شکل، دو خط $y=\frac{1}{2}x$ و $d$ در نقطهٔ $C$ متقاطع‌اند. اگر $A(-6,0)$ و $AB=BC$ باشد، معادلهٔ خط $d$ کدام است؟



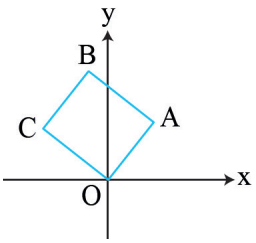

۱) $4y+x-6=0$

۲) $4y-x-6=0$

۳) $x-4y-6=0$

۴) $x+4y-6=0$

۵- در مربع شکل مقابل، اگر $A(2,3)$ باشد، مجموع طول و عرض نقطهٔ $B$ کدام است؟




۱) ۴

۲) ۴/۵

۳) ۵

۴) ۳

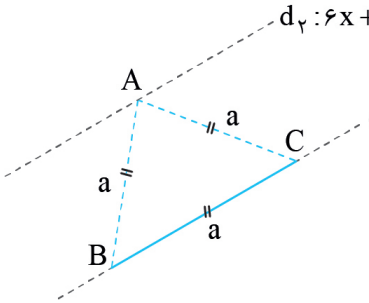
۶- در مثلث $ABC$ با رئوس $A(3,7)$ و $C(7,3)$، ضلع $AB$ موازی محور $y$ها است. اگر مساحت این مثلث برابر ۱۲ باشد، مختصات نقطهٔ $B$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(3,12)$ ۲) $(3,1)$ ۳) $(3,4)$ ۴) $(3,11)$

۷- نقطهٔ $A(2,3)$ را نسبت به خط $y=2$ و نقطهٔ $B(3,-1)$ را نسبت به خط $x=3$ قرینه می‌کنیم تا به ترتیب نقاط $A'$ و $B'$ به دست آیند. سپس نقطهٔ $C(4,-1)$ را نسبت به نقطهٔ $P(2,-1)$ قرینه می‌کنیم تا به نقطهٔ $C'$ برسیم. مساحت مثلث $A'B'C'$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۵

۸- دو خط $d_1=3x+4y-14=0$ و $6x+8y+2=0$ را در نظر بگیرید. یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع روی خط $d_1$ و یک رأس آن روی خط $d_2$ قرار دارد. مساحت این مثلث کدام است؟




۱) $2\sqrt{3}$

۲) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

۳) $3\sqrt{3}$

۴) $4\sqrt{3}$

۹- عمودمنصف پاره‌خط گذرنده از نقاط $(۳,۴)$ و $(-۱,۸)$ با خط $y=\frac{m}{۶}x+\frac{۱}{۴}$ زاویه $۱۵^{\circ}$ تشکیل می‌دهد. حاصل‌ضرب مقادیر قابل قبول برای $m$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳۶ ۳) ۱۲ ۴) ۹

۱۰- دو ضلع مقابل به هم یک مستطیل روی خطوط به معادله $y-ax=۱$ و $ay-x=a-۱$ واقع هستند. اگر قطر مستطیل برابر ۵ و نقطه $(۱,۲)$ یک رأس از مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

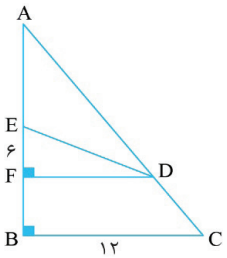
۱) ۲/۵ ۲) ۳/۵ ۳) $\sqrt{۴۶}$ ۴) $۲\sqrt{۳۴}$

**ریاضی ۲۲ اسفند ۱۴۰۳ ماراتون**

۱- فاصلهٔ کدام نقطه از سه ضلع مثلث ABC، همواره یکسان است؟

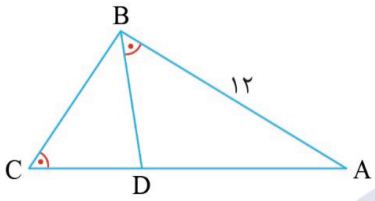
۱) تلاقی سه ارتفاع
۲) تلاقی سه میانه
۳) تلاقی سه نیمساز
۴) تلاقی سه عمودمنصف

۲- در مثلث مقابل، $\frac{AD}{DC}=۲$ و $EF=۶$ و $BC=۱۲$ است. طول پاره خط ED کدام است؟



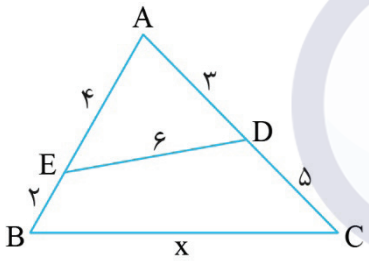

۱) ۹/۵
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۸/۵

۳- در شکل مقابل، $A\hat{B}D=B\hat{C}A$ است و مساحت مثلث ABC، $\frac{۱۶}{۹}$ برابر مساحت مثلث ABD است. طول ضلع CD کدام است؟



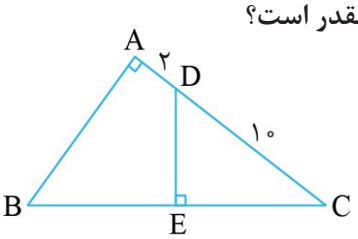

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۴- در شکل مقابل، دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند. مقدار x کدام است؟



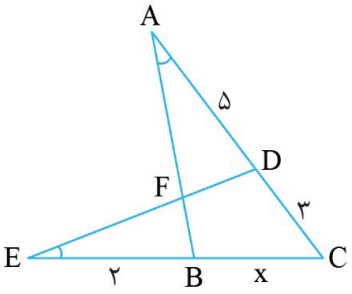

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۵

۵- در شکل مقابل، محیط مثلث ABC، ۱/۵ برابر محیط مثلث DEC است. طول پاره‌خط BE چقدر است؟



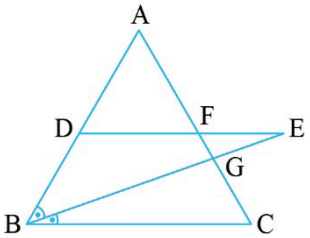

۱) ۶
۲) ۶/۵
۳) ۷
۴) ۷/۵

۶- در شکل مقابل، $B\hat{A}C=D\hat{E}C$ است. مقدار x کدام است؟



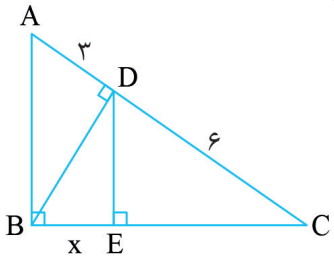

۱) ۲/۸
۲) ۳
۳) ۳/۵
۴) ۴

۷- در مثلث ABC مقابل، پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند و BE نیمساز زاویهٔ B است. اگر $BD = ۸$ و $DF = ۴$ باشد و طول پاره‌خط CG دو برابر GF باشد، طول ضلع BC کدام است؟



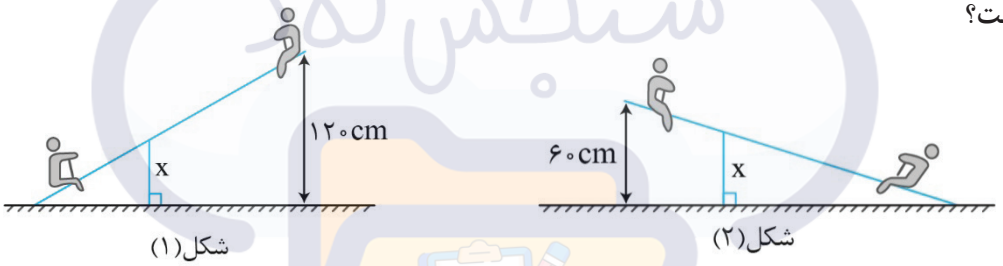

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

۸- مطابق شکل، ارتفاع وارد بر وتر در هر دو مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است، مقدار x کدام است؟



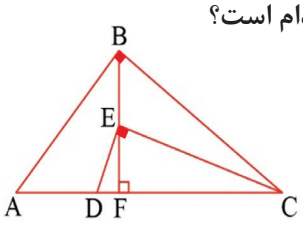

۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $\sqrt{۶}$

۹- یک الاکلنگ با بازوهای نابرابر ساخته شده است. مطابق شکل (۱) وقتی انتهای سمت چپ این الاکلنگ روی زمین قرار می‌گیرد، ارتفاع انتهای سمت راست از سطح زمین برابر ۱۲۰ سانتی‌متر می‌شود و مطابق شکل (۲)، وقتی که انتهای سمت راست الاکلنگ روی زمین قرار می‌گیرد، ارتفاع انتهای سمت چپ از سطح زمین برابر ۶۰ سانتی‌متر می‌شود. طول تکیه‌گاه این الاکلنگ یعنی x، چقدر است؟




۱) ۵۰
۲) ۴۵
۳) ۴۰
۴) ۳۸

۱۰- در شکل زیر، $A\hat{B}C = C\hat{E}D = ۹۰^\circ$ است. اگر $AD = ۳$ و $EF = ۴$ و $DF = ۱$ باشد، اندازهٔ BC کدام است؟




۱) $۴\sqrt{۶}$
۲) $۱۰\sqrt{۲}$
۳) $۶\sqrt{۳}$
۴) $۸\sqrt{۵}$

گروه آموزشی ماز

# دوپینگ

۱- درون یک سالن مستطیل شکل بزرگ، فرشی به شکل مستطیل و با ابعاد ۱۲ و ۸ متر وجود دارد. اگر فاصلهٔ هر طرف فرش از دیوار سالن برابر مقدار ثابت $m$ باشد و مجموع مساحت قسمت‌های فرش نشده برابر ۱۵۶ مترمربع باشد، $m$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

۲- اگر $x_1$ و $x_2$ جواب‌های معادله درجه دوم $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$ باشند و $x_2>x_1$ باشد، حاصل $x_1^4+x_2^2$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۵

۳- هرگاه $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله $x^2-(2k+2)x-2=0$ باشند و بین ریشه‌ها، رابطهٔ $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=-4$ برقرار باشد، مقدار $k$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $-2$ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $-3$

۴- در یک مستطیل طول سه برابر عرض مستطیل است. مقدار ثابتی به عرض اضافه می‌کنیم و به همان مقدار از طول مستطیل کم می‌کنیم به‌طوری که مستطیل حاصل به مستطیل طلایی تبدیل شود. مقدار ثابت چه عددی است؟

۱) $5+2\sqrt{5}$ ۲) $\frac{5+2\sqrt{5}}{2}$

۳) $5-2\sqrt{5}$ ۴) $\frac{5-2\sqrt{5}}{4}$

۵- اگر معادلهٔ $4x^2+6x+k-5=0$ حداکثر یک جواب داشته باشد، کوچک‌ترین مقدار صحیح $k$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) $-7$ ۴) $-8$

۶- به ازای چه مقادیری از $m$ معادلهٔ $x^4-(m+2)x^2-(m+4)=0$ فاقد جواب حقیقی است؟

۱) $-4<m<-2$ ۲) $m<-4$ ۳) $m>2$ ۴) به ازای هیچ مقدار $m$

۷- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x-2}{x}<\frac{x-1}{x+1}$ به صورت $(a,b)$ است. حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) $-1$ ۲) $-2$ ۳) $\frac{-3}{2}$ ۴) $\frac{-5}{2}$

۸- چند عدد صحیح در نامعادلهٔ $x^۲ \le ۸|x| - ۱۲$ صدق می‌کند؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۸

۹- جواب معادلهٔ $\sqrt{\frac{۸}{۲x-۱}+۲۰} = \frac{۱}{۲x-۱}$ برابر $\frac{a}{۲۰}$ است. $a$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۳ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۱۰- اگر یکی از ریشه‌های معادله $۲x-k = \sqrt{۱۱x-۲۴}$ برابر $k$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱۳}{۴}$

۱۱- یک مخزن آب توسط دو شیر $A$ و $B$ پر می‌شود. زمان پر شدن مخزن توسط شیر $B$، سه برابر زمان شیر $A$ است. اگر هر دو شیر باز باشند، مخزن در ۹ ساعت پر می‌شود. اختلاف زمان پر شدن مخزن توسط هر یک از شیرها به تنهایی کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

۱۲- اگر حاصل عبارت $P(x) = \frac{mx^۲ + (۲m+۳)x + ۳}{x^۲ + x + ۱}$، به ازای هر مقدار حقیقی $x$، همواره بزرگ‌تر از ۲ باشد، محدودهٔ $m$ کدام است؟

۱) $m < ۲$ ۲) $m > ۲$ ۳) به ازای هر مقدار $m$ ۴) به ازای هیچ مقدار $m$

۱۳- اگر $x = -۲$ ریشهٔ معادلهٔ $\frac{x}{x+a} + \frac{۱}{a} = \frac{x^۲ - ۱۴}{۲a}$ باشد، $a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $-۲$ ۴) $-۳$

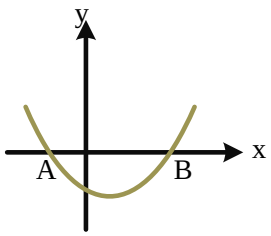
۱۴- سهمی $y = -۶(x-۱)(x-۳)$، خط $y = -۴۸$ را در نقاط $A$ و $B$ قطع می‌کند. مساحت مثلثی که یک رأس آن روی رأس سهمی و دو رأس دیگرش نقاط $A$ و $B$ باشند، کدام است؟

۱) ۱۶۲ ۲) ۱۷۶ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۵۸

۱۵- تعداد جواب(های) معادلهٔ $\sqrt{۲x - \sqrt{x-۲}} + \sqrt{۴-x^۲} = ۲$ چندتاست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۶- نمودار تابع $f(x)=۲x^۲-۱۰x+m$ در شکل مقابل رسم شده است. اگر فاصلهٔ AB برابر ۹ واحد باشد، عرض نقطهٔ رأس سهمی کدام است؟




۱) $-۳۹$

۲) $-۳۹/۵$

۳) $-۴۰$

۴) $-۴۰/۵$

۱۷- ۳۲۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت n درصد موجود است. اگر ۸۰ کیلوگرم نمک به آن اضافه کنیم، غلظت محلول برابر ۳۹/۲ درصد می‌شود. اگر در محلول اولیه، ۱۲۰ کیلوگرم آب را تبخیر کنیم، غلظت محلول چند درصد خواهد شد؟آزمون وی ای پی

۱) ۳۵/۶ ۲) ۳۶/۴ ۳) ۳۷/۶ ۴) ۳۸/۴

۱۸- در کدام‌یک از سهمی‌های زیر، نقطهٔ رأس سهمی در ناحیهٔ سوم محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) $y=۲x^۲-۴x+۱$ ۲) $y=-x^۲+۳x+۲$ ۳) $y=x^۲+۵x+۴$ ۴) $y=-۲x^۲-۶x+۳$

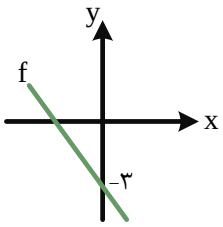
۱۹- اگر اعداد حقیقی و مثبت a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-(۳a-۱)x+۳b=۰$ باشند، حاصل $۳a-۲b$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱ ۳) $-۱$ ۴) $-۹$

۲۰- فاصلهٔ بین رأس‌های دو سهمی $f(x)=x^۲-۴x+m$ و $g(x)=x^۲+۲x+۳$ برابر $\sqrt{۳۴}$ است. کوچک‌ترین مقدار m کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) $-۱$ ۳) $-۱۱$ ۴) ۱

۱- نمودار تابع خطی $f$ شکل روبه‌رو است. اگر $fof(۱)=۷$، مقدار $fof(-۲)$ چه عددی است؟




۱) $-۵$
۲) $-۷$
۳) $-۳$
۴) $-۴$

۲- اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۳}+bx^۳ & |x|\geq ۱\\ ۳x^۳+ax^۲ & |x|\leq ۱\end{cases}$ بیانگر تابع باشد، مقدار $f(-a)$ چه عددی است؟

۱) $\sqrt{۷}+۲۴$ ۲) $\sqrt{۷}-۲۴$ ۳) ۱۶ ۴) $-۱۶$

۳- هرگاه $f=\{(n,۲),(۲,n^۲),(n+۱,۲n),(۲,n+۲)\}$ تابع باشد، مقدار $fof(-۱)$ چه عددی است؟

۱) $-۲$ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۱

۴- تابع $f(x)=\begin{cases}۱-\sqrt{x} & x\geq ۰\\ k-x & x<۰\end{cases}$ یک‌به‌یک است، حدود $k$ کدام است؟

۱) $k\leq -۱$ ۲) $-۱\leq k\leq ۱$ ۳) $k\geq ۱$ ۴) $|k|\geq ۱$

۵- اگر $D_g=[-۳,۲]$ و $D_{f+g}=[-۲,۱]$، دامنهٔ تعریف تابع $y=۲f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $[-۳,۱]$ ۲) $[-۲,۱]$ ۳) $[-۲,۲]$ ۴) $[-۳,-۲]$

۶- اگر $f(x)=۱-\sqrt{۱-x}$ به طوری که $f^{-۱}(x)=ax^۲+bx$، مقدار $ab$ کدام است؟ آزمون وی ا ی پی

۱) $-۴$ ۲) ۴ ۳) $-۲$ ۴) ۲

۷- تابع $f(x)=|x+۱|+۲|x-۱|$، فقط در بازه $[\alpha,+\infty)$ صعودی اکید است. حداقل $\alpha$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-۱$ ۳) ۲ ۴) $-۲$

۸- اگر نقطهٔ $A(۲a,a)$ روی وارون تابع $f(x)=\frac{ax}{x-۱}$ باشد، مقدار $a$ چه عددی می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) $-۲$ ۳) ۴ ۴) $-۴$

۹- دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱}{\sqrt{۴-x}}-۲}$ بازهٔ $[\alpha,\beta)$ است. مقدار $\alpha\beta$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۵ ۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) ۱۷

۱۰- هرگاه $f(x)=\frac{x}{۲x+۱}$ باشد، تابع $y=fof(x)$ خط $y=-۲x$ را در نقاط $A$ و $B$ قطع می‌کند. طول پاره‌خط $AB$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۸}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۶۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۱۶}$

۱۱- هرگاه $f(x)=[x]-۲x$ و $g(x)=f([x+f(x)])$، مقدار $gof(-\frac{۵}{۳})$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۱۲- تابع $f(x)=\frac{ax+b}{x+۳}$ وارون خودش را در نقاطی به طول ۱- و ۳ قطع می‌کند، مقدار $f^{-۱}(۶)$ چه عددی است؟

۱) ۱۵ ۲) ۶- ۳) ۶ ۴) ۱۵-

۱۳- اگر $x\geq ۲$ و $f(x)=۲x^۲-۸x-۱$ و $g(x)=\frac{۵x-۳}{۲}$، مقدار $g^{-۱}of^{-۱}(\frac{-۹}{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) ۳

۱۴- هرگاه $fog(x)=۲-۳x$ و $g^{-۱}(x)=\frac{۲x}{x-۳}$، مقدار $f^{-۱}(-۳)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۷}$ ۲) ۱۵- ۳) ۱ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

۱۵- هرگاه $f(x)=\sqrt{x-۱}-۲\sqrt{۹-x}$، جواب نامعادلهٔ $f(x+۱)\leq f(۴-۲x)$ کدام است؟

۱) $۱\leq x\leq \frac{۳}{۲}$ ۲) $۱\leq x\leq ۸$ ۳) $-\frac{۵}{۲}\leq x\leq \frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۵}{۲}\leq x\leq ۸$

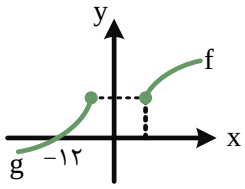
۱۶- اگر وارون تابع $f(x)=x^۳+۲x^۲+ax+۶$، خط $۴x+y=۳$ را در نقطه‌ای به عرض $-۱$ قطع کند، مقدار $a$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) $-۴$ ۴) $-۶$

۱۷- اگر $f(x)=x^۲-[x]$ به طوری که $f\left(af(\sqrt{۳})\right)=۶$، مقدار $a$ کدام می‌تواند باشد؟آزمو ن وی ای پی

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۶}$

۱۸- نمودار توابع $f(x)=۳+\sqrt{x-۲}$ و $g(x)=a-\sqrt{b-x}$ شکل مقابل است. حاصل $a+b$ کدام است؟

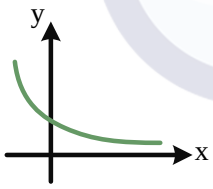



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۷
۴) صفر

۱۹- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۴x+۱۶}$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده‌ایم و سپس ۶ واحد به بالا و $k$ واحد به سمت چپ انتقال داده‌ایم به طوری که نمودار حاصل تابع $y=f(x)$ را روی محور عرض‌ها قطع کرده است، مقدار $k$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۳

۲۰- اگر $f(x)=a^x\ (a\in\mathbb{N})$ و $g(x)=(\frac{۱}{۳})^x$ توابع نمایی و نمودار $f.g$ به صورت مقابل باشد، حاصل $f.g(-۲)$ چقدر است؟




۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۲۵
۴) ۲/۵

۲۱- اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $۳(۳^{x-۱}-۱)=۳^{x+۱}-۹^x$ باشند، بیشترین مقدار $۳^{\alpha}\times۹^{\beta}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۲۷

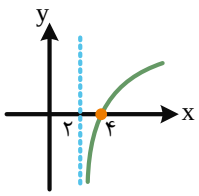
۲۲- معادلهٔ $\log_۲^{(x+۴)}+\log_۲^{|x+۱|}=۲$ دارای چند جواب است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۳- اگر $\log ۲ = ۱ - \log(\sqrt{۷ - ۲\sqrt{۱۰}} + k)$ باشد، $\log_{۴}^{k}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

۲۴- نمودار تابع $f(x) = a + \log_{۲}^{(x+b)}$ به صورت مقابل است. $f(۶)$ چقدر است؟




۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۲۵- جرم یک نوع مادهٔ رادیواکتیو هر ۱۰ سال نصف می‌شود. اگر ۶ کیلوگرم از این ماده موجود باشد، پس از چند سال جرم آن ۲ کیلوگرم است؟ $(\log ۳ \simeq ۰/۴۸, \log ۲ \simeq ۰/۳)$

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

سنجش کلاد

۱- در یک کلاس ۳۰ نفره، تعداد علاقمندان به ریاضی ۳ برابر علاقمندان به فیزیک و ریاضی و ۲ برابر کسانی است که فقط به فیزیک علاقمندند. در این کلاس حداقل چند نفر نه به ریاضی علاقمندند و نه به فیزیک؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع جملات دوم و پنجم، هشت برابر مجموع جملات پنجم و هشتم است. اگر جملهٔ چهارم برابر ۱ باشد، جملهٔ ششم کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۳- بین دو عدد ۲ و $k$ و با شروع از ۲، پنج واسطهٔ حسابی درج می‌کنیم. اگر جملات دوم، سوم و پنجم درج شده تشکیل دنبالهٔ هندسی غیرثابت دهند، $k$ چند برابر جملهٔ دوم درج شده است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $-۴$ ۴) $-۵$

۴- حاصل عبارت $A=\frac{۱۵}{۲\sqrt[۳]{۲}-۱}-۴\sqrt[۳]{۴}-۱$ چقدر است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $۲\sqrt[۳]{۲}$ ۳) $۳\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $۴\sqrt[۳]{۲}$

۵- حاصل $P=\sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}\times ۴^{-\frac{۱}{۳}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲}}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲^۵}}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt[۱۲]{۲}}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt[۱۲]{۲^۵}}$

۶- حاصل عبارت $(x-۶)(x^۲+۱۲)$ به ازای $x=\sqrt[۳]{۶۵}+۲$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $-۱$ ۴) ۲

۷- خطی که از نقطهٔ تلاقی دو خط $۳y-۴x=۱۸$ و $۲y+x=۱$ می‌گذرد و بر خط $۲y=-x+۱۱$ عمود است، از کدام نقطه عبور می‌کند؟

۱) $(۱,۶)$ ۲) $(۱,۱۰)$ ۳) $(-۱,-۶)$ ۴) $(-۱,-۱۰)$

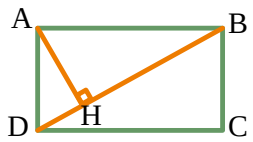
۸- دو نقطه روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم قرار دارند که فاصلهٔ آن‌ها از خط $۳y=۲x+۱۲$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است. حاصل جمع طول‌های این دو نقطه کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-۱$ ۳) $-\frac{۲۴}{۵}$ ۴) $\frac{۲۴}{۵}$

۹- قاعده کوچک یک ذوزنقه به طول $۲-\sqrt{۱۲}$ روی خط $y=\sqrt{۳}x+۲$ و قاعدهٔ بزرگ آن به طول $۳-\sqrt{۲۷}$ روی خط $my-۳x+۶=۰$ قرار دارد. مساحت این ذوزنقه کدام است؟

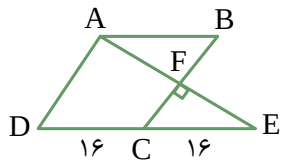
۱) ۱۰ ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) $۱۰\sqrt{۳}$ ۴) ۵

۱۰- در مستطیل شکل مقابل $AB=8\sqrt{3}$ و $BC=8$ است. فاصلهٔ نقطهٔ $H$ از ضلع $AB$ کدام است؟




۱) ۲
۲) ۸
۳) ۶
۴) ۴

۱۱- در شکل مقابل، $\hat{F}=90^\circ$ و چهارضلعی $ABCD$ لوزی است. مساحت مثلث $ABF$ کدام است؟




۱) $16\sqrt{2}$
۲) $32\sqrt{2}$
۳) $16\sqrt{3}$
۴) $32\sqrt{3}$

۱۲- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای نسبت اضلاع قائم ۵ به ۸ است. اگر ارتفاع وارد بر وتر را در این مثلث رسم کنیم، مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث متوسط است؟

۱) $\frac{5}{3}$
۲) $\frac{13}{8}$
۳) $\frac{89}{64}$
۴) $\frac{64}{25}$

۱۳- در یک ذوزنقه قائم‌الزاویه، اندازهٔ قاعده‌ها برابر ۱۶ و ۲۵ است و قطرهای آن بر هم عمود هستند. مساحت مثلثی که اضلاع آن، ساق قائم و قاعدهٔ بزرگ و قطر ذوزنقه است، کدام است؟

۱) ۲۲۵
۲) ۲۰۰
۳) ۲۷۵
۴) ۲۵۰

۱- چند عدد سه رقمی مضرب ۵ با ارقام متمایز وجود دارد؟

۱) ۱۶۲ ۲) ۱۵۶ ۳) ۱۳۶ ۴) ۱۲۰

۲- مجموعهٔ $A=\{1,2,3,...,14\}$ چند زیرمجموعه حداقل با دو عضو دارد که اختلاف بزرگ‌ترین عضو و کوچک‌ترین عضو آن برابر ۱۰ است؟

۱) $2^{10}$ ۲) $2^{11}$ ۳) $5\times2^{9}$ ۴) $5\times2^{8}$

۳- دامنهٔ تابع $f$ مجموعهٔ $\{2,3,4\}$ و برد آن زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{1,2,3,4,...,20\}$ است و برای هر $x$ از دامنهٔ $f$ نابرابری $f(x)>x^2$ برقرار است. چند تابع با این شرایط وجود دارد؟

۱) ۷۰۴ ۲) ۷۴۰ ۳) ۸۲۰ ۴) ۸۲۴

۴- ۴ دانش‌آموز کلاس اول و ۶ دانش‌آموز کلاس سوم در یک صف کنار هم ایستاده‌اند. در چند حالت هیچ دو دانش‌آموز کلاس اول کنار هم نیستند؟

۱) $7!\times60$ ۲) $7!\times120$ ۳) $6!\times120$ ۴) $6!\times60$

۵- چند عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۳ وجود دارد که رقم‌های آن عضو مجموعهٔ $\{2,4,6,7\}$ باشند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

۶- در چند جایگشت از حروف $A, B, C, D, E, F$ حروف $A$ , $B$ کنار یکدیگر و قبل از حرف $F$ قرار دارند؟

۱) ۲۴ ۲) ۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۸۰

۷- به چند طریق می‌توان سه عدد از اعداد مجموعهٔ $\{1,2,3,...,9\}$ را انتخاب و با هم جمع کنیم، طوری که حاصل عددی فرد شود؟

۱) ۱۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

۸- مجموعهٔ $\{1,2,3,...,2n\}$ دارای ۱۲۰ زیرمجموعهٔ سه عضوی است، این مجموعه چند زیر مجموعهٔ چهارعضوی دارد؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۴۰

۹- اگر $P(n,4)=36C(n-1,4)$ مقدار $n$ چه عددی است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۲ ۴) ۸

۱۰- به چند طریق می‌توان ۶ لنگه کفش را از بین ۸ جفت کفش انتخاب کرد طوری که فقط دو جفت کفش بین آن‌ها باشد؟

۱) ۱۶۸۰ ۲) ۲۶۸۸ ۳) ۳۶۹۳ ۴) ۷۳۹۲

۱۱- از کیسه‌ای که شامل ۳ مهرهٔ قرمز، ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ آبی است. دو مهره به تصادف بیرون می‌آوریم. به چه احتمالی مهره‌ها همرنگ هستند؟

۱) $\frac{۱۷}{۶۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱۰}{۳۳}$ ۴) $\frac{۱۹}{۶۶}$

۱۲- یک تاس را هشت بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد سومین باری که ۶ ظاهر می‌شود، در پرتاب پنجم باشد؟

۱) $\frac{۲۵}{۱۲۹۶}$ ۲) $\frac{۱۲۵}{۳۸۸۸}$ ۳) $\frac{۵}{۱۰۸}$ ۴) $\frac{۱۲۵}{۱۹۴۴}$

۱۳- اگر $P(A)=\frac{۱}{۳}$، $P(A|B)=\frac{۲}{۳}$ و $P(B|A)=\frac{۱}{۲}$، مقدار $P(B-A)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۳}{۱۵}$

۱۴- احتمال قبولی فردی در امتحان ادبیات $\frac{۱}{۴}$ و در امتحان ریاضی $\frac{۱}{۶}$ است. اگر او در امتحان ادبیات قبول نشود، احتمال قبولی او در ریاضی $\frac{۱}{۸}$ می‌شود. چقدر احتمال دارد که او حداقل در یکی از دو امتحان قبول شود؟

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۷}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱۳}{۳۲}$

۱۵- اگر $A$ و $B$ دو پیشامد مستقل از هم باشند و $۳P(A)+۶P(B)=۴$، حداقل مقدار ممکن $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۲۳}{۳۶}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴۷}{۷۲}$

۱۶- احتمال ابتلای مردان یک جامعه به نوعی بیماری خاص ۴۰٪ و احتمال ابتلای زنان آن جامعه ۳۰٪ است، اگر ۶۰٪ جمعیت آن جامعه را مردان و بقیه را زنان تشکیل داده باشند و یک فرد از این جامعه انتخاب کنیم، به چه احتمالی به بیماری مبتلا می‌شود؟

۱) ٪۳۴ ۲) ٪۳۶ ۳) ٪۴۸ ۴) ٪۵۶

۱۷- دو جعبه داریم. در جعبه اول ۴ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ دوم ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه وجود دارد. یک مهره از جعبهٔ اول به تصادف برمی‌داریم و در جعبه دوم می‌اندازیم. سپس یک مهره از جعبهٔ دوم به تصادف بیرون می‌آوریم. به چه احتمالی این مهره سفید است؟

۱) $\frac{۱۵}{۴۸}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۴}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱۳}{۴۸}$

۱۸- میانگین و میانهٔ داده‌های $x,۲۴,۲۵,۳۷,۱۰,۲۶,۳۰,۲۳$ با هم برابرند. مقدار $x$ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶

۱۹- واریانس ۴ دادهٔ آماری برابر صفر است. اگر داده‌های ۱۰,۸,۴,۲ را به آن‌ها اضافه کنیم، میانگین تمام داده‌ها برابر ۵ می‌شود، واریانس تمام داده‌ها کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۰- ضریب تغییرات داده‌های $۲,۵,۹,۴m$ برابر $\frac{\sqrt{۷۰}}{۱۴}$ است. مجموع مقادیر ممکن برای $m$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳۸}{۳۵}$ ۲) $\frac{۸۱}{۳۵}$ ۳) $\frac{۸۱}{۳۷}$ ۴) $\frac{۱۵۲}{۳۷}$

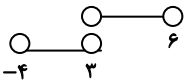
## ریاضی پایه – بسته ۱

**۱– گزینهٔ «۴»** *(سامان سلامیان)*

برای برقراری نامعادله $\frac{f(x)}{g(x)} \le 0$ دو حالت وجود دارد:

$$\text{الف)} \begin{cases} f(x) \ge 0 \xrightarrow{\text{ابالای x ها}} (-\infty, 3] \\ g(x) > 0 \xrightarrow{\text{بالای x ها}} (-4,3) \cup (6,+\infty) \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} (-4,3)$$

$$\text{ب)} \begin{cases} f(x) \le 0 \xrightarrow{\text{زیر x ها}} [3,+\infty) \\ g(x) < 0 \xrightarrow{\text{زیر x ها}} (-\infty,-4) \cup (3,6) \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} (3,6)$$




حال بین جواب قسمت «الف» و «ب» اجتماع می‌گیریم:

$$(\text{الف}) \cup (\text{ب}) : (-4,6) - \{3\}$$

*(معادله ها و نامعادله ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۱)*

---

**۲– گزینهٔ «۲»** *(امیررضا پویامنش)*

اگر $t = |x-2|+1$ باشد، باید نامعادله را طوری مرتب کنیم تا کل نامعادله بر حسب $t$ نوشته شود:

$$(|x-2|+1)^2 - 6|x-2| + 2 < 0 \xrightarrow{2=8-6}$$

$$(|x-2|+1)^2 \underbrace{-6|x-2|-6}_{-6(|x-2|+1)} + 8 < 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 < 0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t-4) < 0 \Rightarrow 2 < t < 4 \Rightarrow 2 < |x-2|+1 < 4 \Rightarrow 1 < |x-2| < 3$$

حال باید این نامعادله را حل کنیم:

$$|x-2| > 1 \Rightarrow \begin{cases} x-2 < -1 \Rightarrow x < 1 \\ x-2 > 1 \Rightarrow x > 3 \end{cases} \Rightarrow x < 1 \text{ یا } x > 3 \quad (I)$$

$$|x-2| < 3 \Rightarrow -3 < x-2 < 3 \Rightarrow -1 < x < 5 \quad (II)$$

مجموعهٔ جواب مدنظر، اشتراک مجموعه‌های I و II یعنی $(-1,1) \cup (3,5)$ است که در این صورت جواب‌های صحیح $x=0$ و $x=4$ خواهند بود. مجموع این دو جواب برابر ۴ است.

*(معادله ها و نامعادله ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۹۱ تا ۹۳)*

---

**۳– گزینهٔ «۲»** *(سامان شرف قراپولو)*

$$\begin{cases} \frac{1}{a} < 0 \Rightarrow a < 0 \\ \Delta < 0 \Rightarrow (ab)^2 - 4(\frac{1}{a})(a^3) < 0 \Rightarrow a^2b^2 - 4a^2 < 0 \Rightarrow a^2(b^2-4) < 0 \\ \xrightarrow{a^2>0} b^2 - 4 < 0 \Rightarrow b^2 < 4 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 < b < 2 \end{cases}$$

در نتیجه تنها مقدار طبیعی ممکن برای $b$، ۱ است.

*(معادله ها و نامعادله ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۱)*

**۴– گزینهٔ «۱»** *(سید امید شفیعی)*

می‌دانیم که $x = vt$ یعنی جابه‌جایی برابر با حاصل ضرب سرعت در زمان طی شده است. پس زمان طی شده در مسیر رفت برابر با $\frac{35}{v}$ می‌گردد (که $v$ سرعت رفت هست.) زمان برگشت نیز برابر با $\frac{35}{v-6}$ خواهد شد. مجموع این دو زمان ۴ ساعت شده است؛ پس:

$$\frac{35}{v} + \frac{35}{v-6} = 4 \Rightarrow 35(\frac{1}{v} + \frac{1}{v-6}) = 4 \Rightarrow \frac{1}{v} + \frac{1}{v-6} = \frac{4}{35}$$

هدف ما در این مسئله محاسبه مقدار $v-6$ هست. لذا نخست مقدار $v$ را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{2v-6}{v(v-6)} = \frac{4}{35} \Rightarrow 4v^2 - 24v = 70v - 210$$

$$\Rightarrow 4v^2 - 94v + 210 = 0 \Rightarrow v = 21, v = \frac{5}{2}$$

مقدار قابل قبول برای $v$ برابر با ۲۱ خواهد بود. لذا سرعت برگشت برابر با $v-6 = 21-6 = 15$ است.

پس گزینهٔ «۱» درست است.

تذکر: معادلهٔ درجهٔ دوم بالا را می‌توانیم به یکی از سه روش زیر حل کنیم:

الف) روش $\Delta$: $v = \frac{94 \pm \sqrt{94^2 - 4(4)(210)}}{8}$ که وقت‌گیر است!

ب) روش $\Delta'$: $v = \frac{47 \pm \sqrt{47^2 - (4)(210)}}{4} = \frac{47 \pm \sqrt{2209 - 840}}{4}$

$$= \frac{47 \pm \sqrt{1369}}{4} = \frac{47 \pm 37}{4} = \begin{cases} \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ 21 \end{cases}$$

پ) ضرب ضریب پرتوان در عدد ثابت و نهایتا تقسیم جواب‌های بدست آمده بر آن، پس:

$$v^2 - 94v - 4(210) = v^2 - 94v - 840$$

$$= (v-10)(v-84) = 0 \Rightarrow v = 10, v = 84$$

$$v = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}, v = \frac{84}{4} = 21$$

*(هندسه تحلیلی و بردر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)*

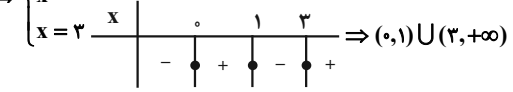
---

**۵– گزینهٔ «۲»** *(جلیل احمد میربلوچ)*

$$x^3 - 3x^2 + 3x > x^2 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - x^2 > 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 + 3x > 0 \Rightarrow x(x^2 - 4x + 3) > 0 \Rightarrow x(x-3)(x-1) > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$




$\Rightarrow (0,1) \cup (3,+\infty)$

پس $a = 0$ و $b = 1$ هستند و میانگین آنها برابر ۰/۵ خواهد بود.

*(معادله ها و نامعادله ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۱)*

**۶- گزینهٔ «۴»** *(علی سرآبادانی)*

$$\frac{۲+\sqrt{x+۴}-(۲-\sqrt{x+۴})}{۴-x-۴}=۲(x+۴)\sqrt{x+۴}\Rightarrow$$

$$\frac{۲\sqrt{x+۴}}{-x}=۲(x+۴)(\sqrt{x+۴})\xrightarrow{\sqrt{x+۴}=۰\to x=-۴}$$

$$\frac{۱}{-x}=x+۴\Rightarrow -x^۲-۴x=۱\Rightarrow x^۲+۴x+۱=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta>۰}\begin{cases}x=-۲-\sqrt{۳}\ \checkmark\\ x=-۲+\sqrt{۳}\ \checkmark\end{cases}$$

بنابراین معادله دارای ۳ جواب است.

*(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)*

---

**۷- گزینهٔ «۳»** *(فرهاد سرامی کلیبر)*

با توجه به اینکه اطراف ریشهٔ $b$ علامت تغییر نکرده است، پس ریشه $b$، ریشهٔ مضاعف خواهد بود. پس: $ax^۲-۸x+۴a:\Delta=۰\Rightarrow ۶۴-۱۶a^۲=۰\Rightarrow a^۲=۴$

$a=-۲$ غیرقابل قبول است؛ چون در این حالت علامت $p(x)$ در $+\infty$ منفی می‌شود.

$$\Rightarrow a=۲\Rightarrow ۲x^۲-۸x+۸=۲(x-۲)^۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow b=۲$$

$$a.b=۲\times ۲=۴$$

*(معادله ها و نامعادله ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۸۸)*

---

**۸- گزینهٔ «۴»** *(محمدپردل نظامی)*

$$\begin{cases}۷-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۷\\ -۶+x\geq ۰\Rightarrow x\geq ۶\\ ۴-\sqrt{۷-x}\geq ۰\Rightarrow ۴\geq\sqrt{۷-x}\Rightarrow ۱۶\geq ۷-x\end{cases}$$

$$\Rightarrow x\geq -۹$$

**هیچ‌کدام در معادله صدق نمی‌کند $\Rightarrow$ اشتراک ۳ بازه $\Rightarrow [۶,۷]\Rightarrow ۶,۷$**

روش ۲: دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۴-\sqrt{۷-x}=x-۶\Rightarrow\sqrt{۷-x}=۱۰-x$$

$$\xrightarrow[\text{توان ۲}]{x\leq ۱۰}۷-x=x^۲-۲۰x+۱۰۰$$

$$\Rightarrow x^۲-۱۹x+۹۳=۰\Rightarrow\Delta=(۱۹)^۲-۴(۹۳)=-۱۱$$

**$\Rightarrow\Delta<۰\Rightarrow$ جواب ندارد**

*(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)*

---

**۹- گزینهٔ «۴»** *(امیررضا پویامنش)*

ابتدا عبارت‌های موجود در مخرج را تجزیه می‌کنیم:

$$x^۲-۱۶=(x-۴)(x+۴)\ ,\ x^۲-۴x=x(x-۴)$$

$$x^۲+۴x=x(x+۴)$$

برای حل معادله، دو طرف را در عبارت $x(x-۴)(x+۴)$ ضرب می‌کنیم:

$$x^۲=k(x-۴)-k(x+۴)\Rightarrow x^۲=-۸k$$

- برای اینکه معادله جواب نداشته باشد ۲ حالت فرض می‌کنیم:

۱) معادله $x^۲=-۸k$ جواب نداشته باشد $\Leftarrow k>۰$

۲) معادله $x^۲=-۸k$ جواب‌های مخرج باشد $\Leftarrow$ برابر ریشه‌های مخرج باشد

$$x^۲=-۸k\begin{cases}x=۴\Rightarrow ۱۶=-۸k\Rightarrow k=-۲\\ x=۰\Rightarrow ۰=-۸k\Rightarrow k=۰\\ x=-۴\Rightarrow ۱۶=-۸k\Rightarrow k=-۲\end{cases}$$

- مقادیر نامثبت $k$: $۰,-۲$ پس اختلاف مقادیر ممکن برای $k$: $|۰-(-۲)|=۲$

*(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)*

---

**۱۰- گزینهٔ «۴»** *(علی اصغر شریفی)*

ابتدا صورت و مخرج کسرها را بر $x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۴}{۵x-۸+\frac{۶}{x}}+\frac{۳}{۵x-۱۰+\frac{۶}{x}}=۱$$

با تغییر متغیر $t=۵x+\frac{۶}{x}$ داریم:

$$\frac{۴}{t-۸}+\frac{۳}{t-۱۰}=۱\Rightarrow ۴(t-۱۰)+۳(t-۸)=(t-۸)(t-۱۰)\Rightarrow t^۲-۲۵t+۱۴۴=۰$$

معادلهٔ بالا دو جواب $t=۹$ و $t=۱۶$ دارد. با توجه به تعریف $t$ داریم:

$$۵x+\frac{۶}{x}=۹\Rightarrow ۵x^۲-۹x+۶=۰\Rightarrow\Delta<۰$$

$$۵x+\frac{۶}{x}=۱۶\Rightarrow ۵x^۲-۱۶x+۶=۰\Rightarrow\Delta>۰$$

با توجه به آن که فقط معادله دوم جواب دارد، پس مجموعه ریشه‌های معادلهٔ اصلی همان مجموع ریشه‌های معادله دوم است:

$$x^۲-۱۶x+۶=۰\Rightarrow x_۱=\frac{۸+\sqrt{۳۴}}{۵}\ ,\ x_۲=\frac{۸-\sqrt{۳۴}}{۵}\Rightarrow x_۱+x_۲=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲$$

*(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)*

---

## ریاضی پایه- بسته ۲

**۱- گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

میزان بارندگی برحسب سانتی‌متر، متغیر کمّی پیوسته، نوع بارندگی (باران، برف و تگرگ) متغیر کیفی اسمی و شدت بارندگی (کم، متوسط و زیاد) متغیر کیفی ترتیبی هستند.

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۶۲ تا ۱۶۷)*

**۲- گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

نکته: اگر میانگین و انحراف معیار داده‌های $x_1$ تا $x_n$ به ترتیب برابر $\bar{x}$ و $\sigma$ باشد، آن‌گاه میانگین و انحراف معیار داده‌های $ax_1+b$ تا $ax_n+b$ به ترتیب برابر $a\bar{x}+b$ و $|a|\sigma$ می‌شود. (*)

برای داده‌های $x_1$ تا $x_{10}$ طبق فرض سؤال داریم:

$$\bar{x}=\frac{x_1+\ldots+x_{10}}{10}=\frac{120}{10}=12$$

داده‌های جدید به صورت $kx_1+\frac{1}{k}, \ldots, kx_{10}+\frac{1}{k}$ می‌باشند. بنابراین طبق فرض داریم:

$$\frac{cv_{\text{اولیه}}}{cv_{\text{جدید}}}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{\frac{\sigma}{\bar{x}}}{\frac{\sigma'}{\bar{x}'}}=\frac{4}{3}\xrightarrow{(*)}\frac{\frac{\sigma}{12}}{\frac{k\sigma}{12k+\frac{1}{k}}}=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{12k+\frac{1}{k}}{12k}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{\frac{1}{k}}{12k}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{4k^2}=1\xrightarrow{k>0}k=\frac{1}{2}$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه ۱۶۰)*

---

**۳- گزینهٔ «۴»** *(آرین تفضلی‌زاده)*

اگر انحراف معیار و میانگین حقوق اولیهٔ کارمندان $\sigma$ و $\bar{x}$ باشد، انحراف معیار و میانگین حقوق ثانویه کارمندان $0/75\sigma$ و $0/75\bar{x}$ می‌شود. طبق رابطهٔ ضریب تغییرات داریم:

$$\begin{cases}cv_{\text{اولیه}}=\frac{\sigma}{\bar{x}}\\ cv_{\text{ثانویه}}=\frac{0/75\sigma}{0/75\bar{x}}=\frac{\sigma}{\bar{x}}\end{cases}\Rightarrow cv_{\text{اولیه}}=cv_{\text{ثانویه}}$$

بنابراین ضریب تغییرات داده‌ها تغییری نخواهد کرد.

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه ۱۶۰)*

---

**۴- گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

با توجه به داده‌های سؤال، اختلاف میانگین در دو حالت ذکر شده برابر ۱ واحد می‌باشد؛ یعنی:

$$\frac{3+7+a+16+12}{5}-\frac{3+7+2a+16+12}{6}=1\Rightarrow\frac{a+38}{5}-\frac{38+2a}{6}=1$$

$$\xrightarrow{\times 30}6a+\underbrace{6\times 38-5\times 38}_{38}-10a=30\Rightarrow 38-4a=30$$

$$\Rightarrow 4a=8\Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow \text{مقدار واقعی میانگین}:\ \bar{x}=\frac{3+7+2+16+12}{5}=8$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۳ و ۱۵۴)*

---

**۵- گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

چون واریانس داده‌های $x_1$ ، $x_2$ ، $x_3$ و $x_4$ برابر صفر است، پس این داده‌ها برابر یکدیگرند. با فرض $x_1=x_2=x_3=x_4=x$ داریم:

$$\bar{x}=\frac{(x+1)+(2x+2)+(3x+3)+(4x+4)}{4}=10$$

$$\Rightarrow\frac{10x+10}{4}=10\Rightarrow 10x=30\Rightarrow x=3$$

واریانس داده‌های ۴ ، ۱۲ ، ۸ ، ۱۶ برابر است با:

$$\sigma^2=\frac{(4-10)^2+(8-10)^2+(12-10)^2+(16-10)^2}{4}$$

$$=\frac{36+4+4+36}{4}=20$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۳ تا ۱۵۹)*

---

**۶- گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

مطابق فرض داریم:

$$\text{داده‌های اولیه}: x_1, x_2, \ldots, x_n\Rightarrow\begin{cases}\bar{x}=4\\ cv=\frac{1}{2}=\frac{\sigma}{\bar{x}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sigma=\frac{1}{2}\times 4=2\Rightarrow\sigma^2=4$$

$$\text{واریانس داده‌های اولیه}=\frac{(x_1-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}=4$$

$$\Rightarrow(x_1-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2=4n$$

حال اگر سه دادهٔ برابر (برابر میانگین داده‌های قبلی)، به این داده‌ها اضافه شوند، میانگین داده های جدید تغییر نکرده و مجموع مجذورهای انحراف از میانگین داده‌ها نیز تغییری نخواهد کرد.

$$\text{داده‌های جدید}: x_1, x_2, \ldots, x_n, 4, 4, 4$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\bar{x}'=4\\ (cv)'=\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sigma'}{4}\Rightarrow\sigma'=\sqrt{3}\Rightarrow\sigma'^2=3\end{cases}$$

$$\sigma'^2=\frac{(x_1-\bar{x}')^2+\ldots+(x_n-\bar{x}')^2}{n'}=\frac{(x_1-\bar{x}')+\ldots+(x_n-\bar{x}')}{n+3}=3$$

$$\Rightarrow 3=\frac{4n}{n+3}\Rightarrow 3n+9=4n\Rightarrow n=9$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۳ تا ۱۶۰)*

---

**۷- گزینهٔ «۳»** *(مانی موسوی)*

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$-10,-7,-4,0,1,1,6,7,7,10,13,13$$

داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم، ۱۰، ۱۳ و ۱۳ هستند. بنابراین میانهٔ آن‌ها برابر ۱۳ خواهد شد. همچنین داده‌های کوچک‌تر از چارک اول برابر $-10$، $-7$ و $-4$ هستند. بنابراین داریم:

$$\bar{x}=\frac{(-10)+(-7)+(-4)}{3}=-7$$

$$\Rightarrow\sigma^2=\frac{(-10-(-7))^2+(-7-(-7))^2+(-4-(-7))^2}{3}=\frac{18}{3}=6$$

$$\Rightarrow 13-6=7$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۳ تا ۱۶۲)*

**۸- گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

فرض می‌کنیم تعداد داده‌های اولیه $n$ و واریانس آن‌ها $\sigma^2$ می‌باشد. طبق فرض:

$$\begin{cases}\frac{n}{n+3}\sigma^2=27\\ \frac{n}{n-3}\sigma^2=45\end{cases}\Rightarrow\frac{n-3}{n+3}=\frac{27}{45}=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 5n-15=3n+9\Rightarrow 2n=24\Rightarrow n=12$$

بنابراین:

$$\frac{12}{12+3}\sigma^2=27\Rightarrow\sigma^2=27\times\frac{15}{12}=27\times\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow\sigma^2=\frac{135}{4}=33/75$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۷ تا ۱۵۹)*

---

**۹- گزینهٔ «۱»** *(شبنم غلامی)*

می‌دانیم برای هر سری داده‌های آماری، مجموع انحراف از میانگین داده‌ها برابر صفر است، یعنی مجموع تفاضل میانگین از داده‌ها (یا برعکس، مجموع تفاضل داده‌ها از میانگین) همواره برابر صفر می‌شود. پس میانگین داده‌های اولیه برابر ۶ است. از طرفی با ۲ برابر شدن داده‌ها، واریانس آن‌ها ۴ برابر می‌شود؛ پس واریانس داده‌های اولیه برابر $\frac{16}{4}=4$ و انحراف معیار آن‌ها برابر ۲ است. در نتیجه ضریب تغییرات این داده‌ها برابر است با:

$$cv=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحهٔ ۱۶۰)*

**۱۰- گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا میانگین داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{1+5+(a+1)+(3a+1)}{4}=a+2$$

واریانس داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^2=\frac{(1-a-2)^2+(5-a-2)^2+(a+1-a-2)^2+(3a+1-a-2)^2}{4}$$

$$=\frac{(-a-1)^2+(-a+3)^2+1+(2a-1)^2}{4}=\frac{6a^2-8a+12}{4}$$

واریانس را برابر ۵ قرار می‌دهیم:

$$\frac{6a^2-8a+12}{4}=5\Rightarrow 6a^2-8a+12=20$$

$$\Rightarrow 6a^2-8a-8=0\Rightarrow 3a^2-4a-4=0$$

$$\Rightarrow(3a+2)(a-2)=0\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{2}{3}\ \text{غ ق ق}\\ a=2\end{cases}$$

بنابراین میانگین داده‌ها برابر $\bar{x}=a+2=4$ است.

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۳ تا ۱۵۹)*

## ریاضی پایه بسته ۱

**۱- گزینهٔ «۳»** (محمدصادق هدایتی)

$$\Delta<0\Rightarrow\Delta=(m-2)^2-4(m)(1)=m^2-8m+4<0$$ : ریشه حقیقی ندارد.

$$\Delta_{\text{معادله جدید}}=64-4(1)(4)=64-16=48$$

$$m=\frac{8\pm4\sqrt{3}}{2}=4\pm2\sqrt{3}$$

| m | | $4-2\sqrt{3}\simeq0/6$ | | $4+2\sqrt{3}\simeq7/4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | + | ۰ | − | ۰ | + |

$$\Rightarrow$$

مقادیر صحیح: $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۴ و ۷۵)

---

**۲- گزینهٔ «۴»** (جلیل احمد میربلوچ)

ابتدا ضریب $x$ را گویا می‌کنیم و سپس معادله را مرتب می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1$$

$$\Rightarrow x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}x=1\\x=\sqrt{2}\end{cases}$$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

---

**۳- گزینهٔ «۴»** (یغما گلانتریان)

$$\frac{x^2}{2}-4x-1=0\Rightarrow\frac{1}{2}(x^2-8x)=1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}(x^2-8x+16-16)=1\Rightarrow\frac{1}{2}(x-4)^2=9\Rightarrow\begin{cases}\alpha=4\\\beta=9\end{cases}$$

$$\alpha+\beta=13$$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

---

**۴- گزینهٔ «۲»** (وحید عبدالملکی)

چون معادله درجهٔ دوم ریشهٔ مضاعف دارد، پس $\Delta=0$ است.

$$4(m-2)^2-4(m-2)(1)=0$$

$$4(m-2)(m-3)=0\Rightarrow m=2\quad\text{غ ق ق}\quad,\ m=3\ \text{ق ق}$$

$$3x-4\sqrt{x}-4=0$$

$$\sqrt{x}=t\Rightarrow3t^2-4t-4=0\Rightarrow t=2\quad\text{ق ق}\quad,t=\frac{-2}{3}\ \text{غ ق ق}$$

$$t=2\Rightarrow\sqrt{x}=2\Rightarrow x=4$$

در نتیجه معادله دوم یک جواب دارد.

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

---

**۵- گزینهٔ «۱»** (محسن اسماعیل پور)

$$x^2+3x+1=0\Rightarrow\begin{cases}S=-\frac{b}{a}=-3\\P=\frac{c}{a}=1\end{cases}$$

$$S'=3\alpha-1+3\beta-1=3S-2=-11$$

$$P'=(3\alpha-1)(3\beta-1)=3\alpha\times3\beta-3\alpha-3\beta+1$$

$$=9P-3S+1=9+9+1=19$$

$$x^2-S'x+P'=0\Rightarrow x^2+11x+19=0$$

(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

---

**۶- گزینهٔ «۳»** (توحید اسری)

$$S=a+b=-\frac{6}{9b}=-\frac{2}{3b}$$

$$P=ab=\frac{a}{9b}\Rightarrow\begin{cases}a=0\Rightarrow\text{غ ق ق زیرا در تساوی S به تناقض می‌رسیم}\ b^2=-\frac{2}{3}\\b=\pm\frac{1}{3}\xrightarrow{a<b}b=\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$a+b=-\frac{2}{3b}\Rightarrow a+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3(\frac{1}{3})}\Rightarrow a=-\frac{7}{3}$$

از طرفی می‌دانیم به ازای $x=0$ مقدار $y=a$ می‌باشد که همان عرض از مبدأ است.

(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

---

**۷- گزینهٔ «۳»** (مسعود یکتا)

$$S=\alpha+\beta=-3$$

$$P=\alpha.\beta=-5\Rightarrow\alpha^2\beta^2=25$$

$$\frac{25\alpha+\beta^5}{6\beta^2}=\frac{\alpha^2\beta^2+\beta^5}{6\beta^2}=\frac{\beta^2(\alpha^3+\beta^3)}{6\beta^2}=\frac{S^3-3PS}{6}=-12$$

(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

---

**۸- گزینهٔ «۱»** (مظفر آبسری)

با توجه به این‌که معادله دو ریشهٔ متمایز $\alpha$ و $\beta$ دارد:

$$\Delta>0\Rightarrow(1)^2-4(-m)>0\Rightarrow1+4m>0\Rightarrow m>-\frac{1}{4}\quad(1)$$

با توجه به اینکه $x=2$ بین دو ریشه است و ضریب $x^2$ مثبت است مقدار تابع $y=x^2+x-m$ در نقطه $x=2$، منفی است:

$$2^2+2-m<0\Rightarrow6<m\ (2)\xrightarrow[(2),(1)]{\text{اشتراک}}6<m$$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۱)

---

**۹- گزینهٔ «۱»** (محمدابراهیم توزنده جانی)

در توابع درجه دوم $f$ و $g$، ضرایب $x^2$ مخالف هم هستند (مطابق شکل)، پس تابع $h=f-g$ قطعاً یک تابع درجهٔ دوم بوده و با توجه به این که $h(1)=h(3)=0$ می‌شود، می‌توانیم بنویسیم:

$$h(x)=a(x-1)(x-3)$$

$$h(0)=f(0)-g(0)=6\Rightarrow a=2$$

$$AB=h(m)\Rightarrow\frac{5}{2}=2(m-1)(m-3)\Rightarrow4m^2-16m+7=0\Rightarrow m=\frac{7}{2}$$

(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

**۱۰– گزینهٔ «۳»** *(علی اصغر شریفی)*

با توجه به آن که $(x+1)(x+6)=x^2+7x+6$ و $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$، معادله به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$((x^2+6x+6)+x)((x^2+6x+6)-x)=mx^2$$

$$\Rightarrow (x^2+6x+6)^2-x^2=mx^2 \Rightarrow (x^2+6x+6)^2=(m+1)x^2$$

$$\Rightarrow x^2+6x+6=\pm\sqrt{m+1}x \Rightarrow x^2+(6\pm\sqrt{m+1})x+6=0$$

پس به دو معادلهٔ درجه دوم رسیدیم. معادلهٔ $x^2+(6+\sqrt{m+1})x+6=0$ دو ریشه دارد؛ چون:

$$\Delta=(6+\sqrt{m+1})^2-4\times6\geq6^2-4\times6>0$$

با توجه به آن که معادلهٔ اولیه مجموعاً سه ریشه دارد، پس معادلهٔ $x^2+(6-\sqrt{m+1})x+6=0$ باید یک ریشه (مضاعف) داشته باشد:

$$\Delta=0:(6-\sqrt{m+1})^2=4\times6\Rightarrow\sqrt{m+1}-6=\pm2\sqrt{6}\Rightarrow\sqrt{m+1}=6\pm2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow m+1=36+24\pm24\sqrt{6}\Rightarrow m=59\pm24\sqrt{6}$$

بنابراین حاصل ضرب دو مقدار $m$ برابر است با:

$$m_1m_2=(59+24\sqrt{6})(59-24\sqrt{6})=59^2-6\times24^2=3481-3456=25$$

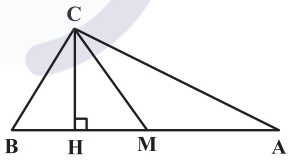
*(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)*

---

## ریاضی پایه بسته ۲

**۱– گزینهٔ «۱»** *(سینا خیرخواه)*

با در نظر گرفتن شکل زیر داریم:




نقطهٔ $M$ وسط ضلع $AB$ است، در نتیجه:

$$M=(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})=(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$$

حال مختصات نقطهٔ $H$ که محل تلاقی معادلات گذرنده از خطوط $AB$ و $CH$ هستند را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases}L_{AB}: m_{AB}=\frac{0-3}{3-0}=-1\xrightarrow{(0,3)\in L_{AB}}y=-x+3\\ L_{CH}: m_{CH}=\frac{-1}{m_{AB}}=1\xrightarrow{(4,3)\in L_{CH}}y=x-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow x-1=-x+3\Rightarrow x=2,\ y=1\Rightarrow H(2,1)$$

در نهایت اندازهٔ $MH$ را محاسبه می‌کنیم:

$$MH=\sqrt{(2-\frac{3}{2})^2+(1-\frac{3}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

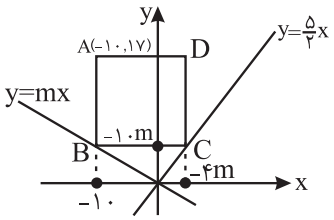
*(هندسه تحلیلی و بیر) (ریاضی۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)*

---

**۲– گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

بقیهٔ رئوس مربع را نام‌گذاری می‌کنیم. برای یافتن مختصات مرکز مربع، کافیست مختصات نقطهٔ $C$ را به‌دست آوریم. با توجه به شکل، معادلهٔ خط مجهول را $y=mx$ می‌گیریم.

در این صورت:




$$x_B=x_A=-10\xrightarrow{B\in(y=mx)}y_B=-10m$$

$$y_C=y_B=-10m\xrightarrow{C\in(y=\frac{5}{2}x)}-10m=\frac{5}{2}x_C\Rightarrow x_C=-4m$$

اندازه اضلاع مربع با هم برابر است؛ پس:

$$\begin{cases}AB=y_A-y_B=17-(-10m)=17+10m\\ BC=x_C-x_B=-4m-(-10)=-4m+10\end{cases}$$

$$\xrightarrow{AB=BC}17+10m=-4m+10\Rightarrow 14m=-7\Rightarrow m=\frac{-1}{2}$$

در نتیجه مختصات نقطهٔ $C$ به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{cases}x_C=-4m=2\\ y_C=-10m=5\end{cases}\Rightarrow C(2,5)$$

مرکز مربع $(W)$، نقطه وسط قطر $AC$ است. در نتیجه:

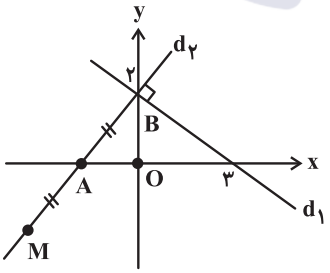
$$W=\frac{A+C}{2}=(\frac{-10+2}{2},\frac{17+5}{2})=(-4,11)$$

*(هندسه تحلیلی و بیر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)*

---

**۳– گزینهٔ «۲»** *(سینا خیرخواه)*

مطابق شکل، دو خط $d_1$ و $d_2$ بر هم عمودند. پس:




$$M_{d_1}=-\frac{2}{3}\xrightarrow{d_2\perp d_1}M_{d_2}=\frac{3}{2}\Rightarrow d_2: y=\frac{3}{2}x+2$$

محل برخورد خط $d_2$ با محور $x$ها (مختصات نقطهٔ $A$) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{3}{2}x+2=0\Rightarrow x=-\frac{4}{3}\Rightarrow A(-\frac{4}{3},0)$$

حالا قرینهٔ نقطهٔ $B(0,2)$ را نسبت به نقطهٔ $A(-\frac{4}{3},0)$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}x_M=2x_A-x_B=2(-\frac{4}{3})-0=-\frac{8}{3}\Rightarrow M(-\frac{8}{3},-2)\\ y_M=2y_A-y_B=2(0)-2=-2\end{cases}$$

فاصلهٔ نقطهٔ $M$ تا مبدأ مختصات برابر می‌شود با:

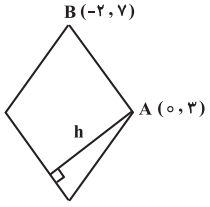
$$OM=\sqrt{(-\frac{8}{3})^2+(-2)^2}=\sqrt{\frac{64}{9}+4}=\sqrt{\frac{100}{9}}=\frac{10}{3}$$

*(هندسه تحلیلی و بیر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)*

**۴- گزینهٔ «۳»** *(مهدی نعمتی)*

طبق فرض، طول ضلع متوازی الاضلاع برابر است با:

$$a = AB = \sqrt{(-۲-۰)^۲ + (۷-۳)^۲} = ۲\sqrt{۵}$$




مطابق شکل، فاصلهٔ نقطهٔ $A$ تا خط $y + ۲x + ۷ = ۰$ برابر با طول ارتفاع متوازی الاضلاع است:

$$h = \frac{|۳+۷|}{\sqrt{۵}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵}}$$

در نتیجه مساحت این شکل برابر است با: $S = a \times h = ۲\sqrt{۵} \times \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} = ۲۰$

*(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)*

---

**۵- گزینهٔ «۳»** *(مانی موسوی)*

برای به دست آوردن معادلهٔ خط $AH$، ابتدا باید مختصات نقطهٔ $A$ را پیدا کنیم. برای این کار، از معادلات خط $AB$ و $AC$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲y + x = ۲ \\ ۲y - ۳x = ۶ \end{cases} \Rightarrow x = -۱ , y = \frac{۳}{۲} \Rightarrow A : (-۱, \frac{۳}{۲})$$

همچنین می‌دانیم ارتفاع وارد بر $BC$، بر آن عمود است؛ بنابراین حاصل ضرب شیب آن‌ها برابر ۱- می‌باشد:

$$BC : ۳y + x = -۳ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x - ۱ \Rightarrow m_{BC} = -\frac{۱}{۳}$$

$$-\frac{۱}{۳}m_{AH} = -۱ \xrightarrow{} m_{AH} = ۳$$

حال با دانستن مختصات نقطهٔ $A$ و شیب $AH$، معادلهٔ خط $AH$ را به دست می‌آوریم:

$$AH : y - \frac{۳}{۲} = ۳(x - (-۱)) \Rightarrow y - \frac{۳}{۲} = ۳x + ۳ \Rightarrow y = ۳x + \frac{۹}{۲}$$

می‌دانیم که نقاط روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم، به فرم کلی $(a, -a)$ هستند؛ بنابراین:

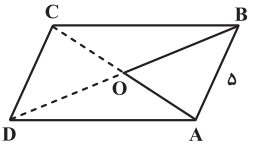
$$-a = ۳a + \frac{۹}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۹}{۸} \Rightarrow (-\frac{۹}{۸}, \frac{۹}{۸})$$

*(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)*

---

**۶- گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

فرض کنید $AB = ۵$ باشد. مطابق شکل در مثلث $ABO$ داریم:




$$AO + BO = \frac{۱}{۲}AC + \frac{۱}{۲}BD = ۹$$

پس با توجه به نامساوی مثلثی حالت‌های زیر قابل قبول است:

$AO = ۲/۵ \ , \ BO = ۶/۵$

$AO = ۳ \ , \ BO = ۶$

$AO = ۳/۵ \ , \ BO = ۵/۵$

$AO = ۴ \ , \ BO = ۵$

$AO = ۴/۵ \ , \ BO = ۴/۵$

دقت کنید که در هر حالت و با رسم مثلث $OAB$، یک متوازی‌الاضلاع منحصر به فرد حاصل می‌شود و همچنین بخش اعشاری $OA$ و $OB$ تنها می‌تواند ۰/۵ و صفر باشد، چون طول قطرها عددی صحیح است.

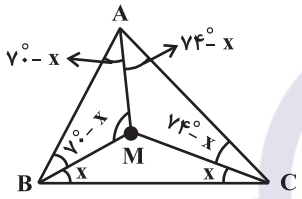
*(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)*

---

**۷- گزینهٔ «۳»** *(اسفندیار اسفندیار)*

$$\hat{B} = ۷۰^\circ \ , \ \hat{C} = ۷۴^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۳۶^\circ$$

هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.




$$MB = MC = AM$$

$$\hat{A} = (۷۰^\circ - x) + (۷۴^\circ - x) = ۳۶^\circ \Rightarrow x = ۵۴^\circ$$

$$A\hat{M}B = ۱۸۰^\circ - ۲(۷۰^\circ - x) = ۱۴۸^\circ$$

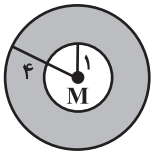
*(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)*

---

**۸- گزینهٔ «۲»** *(فاطمه برزویی)*

مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از نقطهٔ $M$ به فاصلهٔ ۱ واحد هستند، تشکیل یک دایره به مرکز $M$ و شعاع ۱ را می‌دهند و مجموعهٔ نقاطی که از نقطهٔ $M$ به فاصلهٔ ۴ واحد هستند نیز تشکیل یک دایره به مرکز $M$ و شعاع ۴ را می‌دهند. بنابراین داریم:

$$S_{\text{رنگی}} = ۴^۲\pi - ۱^۲\pi = ۱۵\pi$$

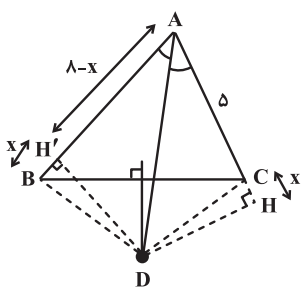



*(هندسه) (ریاضی ۲، صفحهٔ ۲۶)*

---

**۹- گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

مطابق شکل، عمود $DH'$ را بر ضلع $AB$ رسم می‌کنیم. چون $D$ روی عمودمنصف ضلع $BC$ است، پس $DB = DC$.



از طرفی $D$ روی نیمساز زاویهٔ $A$ است؛ پس $DH = DH'$. بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $DCH$ و $DBH'$ با هم همنهشت‌اند پس فرض می‌کنیم $BH' = CH = x$. از طرفی دو مثلث $ADH$ و $ADH'$ نیز با هم همنهشت‌اند؛ در نتیجه:

$$AH = AH' \Rightarrow ۵ + x = ۸ - x$$

$$\Rightarrow ۲x = ۳ \Rightarrow x = ۱/۵$$

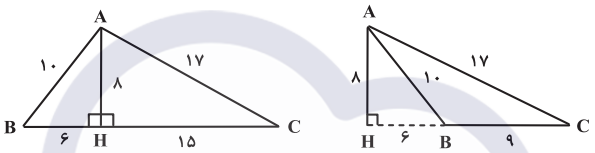
پس $CH = ۱/۵$.

*(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۰)*

---

**۱۰- گزینهٔ «۲»** *(هومن عقیلی)*

مطابق شکل‌های زیر، ۲ مثلث متمایز برای $ABC$ وجود دارد.




*(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)*

## ریاضی پایه–بسته۱

**۱– گزینهٔ «۳»** (بهزاد محرمی)

با توجه به اینکه ریشه‌های $n$ ام(اگر $n$ زوج باشد) دو عدد قرینهٔ هم هستند، پس:

$$a+1+(-2a+1)=0 \Rightarrow a=2$$

$$\xrightarrow{a=2}\begin{cases}a+1=3\\-2a+1=-3\end{cases} \Rightarrow$$ ۳ و ۳- ریشه‌های چهارم عدد ۸۱ هستند. $\Rightarrow n=4$

$$a+n=2+4=6$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری)(ریاضی ۱، صفحه‌های ۵۴ تا ۵۷)

---

**۲– گزینهٔ «۴»** (رضا ادیبی)

با توجه به اینکه $\sqrt[3]{x}<x$، پس: $x>1$ و یا $-1<x<0$.

(گزینه‌های «۱» و «۲» رد می‌شوند)

و با توجه به اینکه $x^4<x^5$، می‌توان نتیجه گرفت $x>1$ که گزینهٔ «۳» هم رد می‌شود.

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

---

**۳– گزینهٔ «۴»** (امین عین‌الهی مقصودلو)

اگر $0<a<1$ باشد، در این صورت $\sqrt[5]{a}>\sqrt[4]{a}>\sqrt[3]{a}$ است، پس:

$$d=\sqrt[5]{a}$$
$$c=\sqrt[4]{a}$$
$$b=\sqrt[3]{a}$$

همچنین این عدد، ۲ ریشهٔ چهارم دارد.

بنابراین: $e=-\sqrt[4]{a}$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

---

**۴– گزینهٔ «۱»** (امین عین‌الهی مقصودلو)

$$\sqrt[3]{-b}=-3 \Rightarrow -b=(-3)^3=-27 \Rightarrow b=27$$

$$\sqrt[3]{a}=b-17 \xrightarrow{b=27} \sqrt[3]{a}=10 \Rightarrow a=10^3=1000$$

$$\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{27\times 1000}=\sqrt[3]{(30)^3}=30$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۵۴ تا ۵۷)

---

**۵– گزینهٔ «۴»** (یوسف عراز)

$$\frac{\sqrt{5\sqrt[3]{15\sqrt{135}}}}{\sqrt{9\sqrt[6]{\frac{243}{125}}}}=\frac{5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}\times 3^{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}}{3^{1+\frac{5}{12}}\times 5^{-\frac{3}{12}}}=\frac{5^{\frac{9}{12}}\times 3^{\frac{5}{12}}}{5^{\frac{-3}{12}}\times 3^{\frac{17}{12}}}=\frac{5^{\frac{9}{12}+\frac{3}{12}}}{3^{\frac{17}{12}-\frac{5}{12}}}=\frac{5}{3}$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

---

**۶– گزینهٔ «۴»** (علیرضا فیضیان)

$$\sqrt[3]{a}>a \xrightarrow{a>0} 0<a<1$$

$$a^2+\frac{1}{a^2}=(a-\frac{1}{a})^2+2=11 \Rightarrow (a-\frac{1}{a})^2=9 \Rightarrow a-\frac{1}{a}=\pm 3$$

$$\xrightarrow{0<a<1} a-\frac{1}{a}=-3$$

$$\Rightarrow a^3-\frac{1}{a^3}=(a-\frac{1}{a})(a^2+\frac{1}{a^2}+1)=(-3)(11+1)=-36$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

---

**۷– گزینهٔ «۳»** (سعید تن آرا)

ابتدا کسر داده شده را با استفاده از فاکتورگیری و اتحادها تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^5-10x^3+9x}{(x^2-2x-3)(x^2+2x-3)}=\frac{x(x^4-10x^2+9)}{(x-3)(x+1)(x-1)(x+3)}$$

$$=\frac{x(x^2-1)(x^2-9)}{(x-3)(x+1)(x-1)(x+3)}=\frac{x(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)}=x$$

بنابراین مقدار عددی کسر داده شده به ازای $x=\sqrt{5}+1$ برابر $\sqrt{5}+1$ خواهد بود.

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

---

**۸– گزینهٔ «۲»** (سعید تن آرا)

با استفاده از ویژگی‌های توان‌های گویا داریم:

$$\frac{128^{-\frac{1}{7}}+9^{-\frac{1}{2}}}{64^{\frac{1}{12}}+1}=\frac{(2^7)^{-\frac{1}{7}}+(3^2)^{-\frac{1}{2}}}{(2^6)^{\frac{1}{12}}+1}=\frac{2^{-1}+3^{-1}}{2^{\frac{1}{2}}+1}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{\frac{5}{6}}{\sqrt{2}+1}=\frac{5}{6(\sqrt{2}+1)}$$

برای گویاسازی کسر، صورت و مخرج آن را در $\sqrt{2}-1$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{5}{6(\sqrt{2}+1)}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{5(\sqrt{2}-1)}{6(2-1)}=\frac{5\sqrt{2}-5}{6}$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۵۹ و ۶۷)

---

**۹– گزینهٔ «۳»** (علیرضا فیضیان)

$$A=\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}<0 \xrightarrow{\text{توان۲}}$$ **فرض می‌کنیم**

$$A^2=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-2\sqrt{4-3}=2 \xrightarrow{A<0} A=-\sqrt{2}$$

**ازطرفی:** $\sqrt{4-\sqrt{12}}+1=\sqrt{4-2\sqrt{3}}+1=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}+1=\sqrt{3}-1+1=\sqrt{3}$

**بنابراین:** $(\sqrt{3})\times(-\sqrt{2})=-\sqrt{6}$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ و ۶۷)

---

**۱۰– گزینهٔ «۱»** (علی اصغر شریفی)

$a$ و $b$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a=\sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}}$$

$$b=\sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}}$$

بنابراین:

$$a^3+b^3=\frac{23+\sqrt{513}}{4}+\frac{23-\sqrt{513}}{4}=\frac{2\times 23}{4}=\frac{23}{2}$$

$$a^3b^3=\frac{23+\sqrt{513}}{4}\times\frac{23-\sqrt{513}}{4}=\frac{529-513}{16}=\frac{16}{16}=1 \Rightarrow ab=1$$

با توجه به صورت سوال داریم:

$$3x+1=a+b \Rightarrow (3x+1)^3=(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$\Rightarrow (3x+1)^3=\frac{23}{2}+3(3x+1) \Rightarrow 2(3x+1)^3-6(3x+1)-23=0$$

$$\Rightarrow 2(27x^3+27x^2+9x+1)-18x-6-23=0 \Rightarrow 54x^3+54x^2-27=0$$

$$\Rightarrow 2x^3+2x^2=1$$

چون $x$ مثبت است، پس:

$$x^2(2x+2)=1 \Rightarrow x\sqrt{2x+2}=1$$

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

**۱– گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

روش اول: دو مثلث $AMN$ و $BMN$ در ارتفاع رسم شده از رأس $N$ مشترک هستند، پس نسبت مساحت‌های این دو مثلث برابر نسبت قاعده‌های آن‌ها است، یعنی داریم:

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle BMN}} = \frac{AM}{BM} = \frac{۳}{۵} \qquad (۱)$$

در دو مثلث $BNC$ و $BMN$، ارتفاع وارد بر قاعده‌های $MN$ و $BC$ برابر یکدیگرند (فاصلهٔ دو خط موازی $MN$ و $BC$)؛ پس نسبت مساحت‌های این دو مثلث برابر نسبت قاعده‌هاست، یعنی داریم:

$$\frac{S_{\triangle BNC}}{S_{\triangle BMN}} = \frac{BC}{MN} \qquad (*)$$

از طرفی طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث $ABC$ داریم:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{۳}{۸} \Rightarrow \frac{BC}{MN} = \frac{۸}{۳} \xrightarrow{(*)} \frac{S_{\triangle BNC}}{S_{\triangle BMN}} = \frac{۸}{۳} \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\,,\,(۲)} \frac{\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle BMN}}}{\frac{S_{\triangle BNC}}{S_{\triangle BMN}}} = \frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{۸}{۳}} = \frac{۹}{۴۰}$$

روش دوم: طبق قضیهٔ تالس:

$$(۱)\ \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{۳}{۵} \xrightarrow{\text{فرض}} \begin{cases} AN = ۳\beta \\ NC = ۵\beta \end{cases}$$

$$(۲)\ \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{۳}{۸} \xrightarrow{\text{فرض}} \begin{cases} MN = ۳\alpha \\ BC = ۸\alpha \end{cases}$$

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle BNC}} = \frac{AN \times MN \times \frac{۱}{۲} \times \sin\hat{N}}{NC \times BC \times \frac{۱}{۲} \times \sin\hat{C}} \xrightarrow{\hat{N}=\hat{C}} \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle BNC}} = \frac{۳\beta \times ۳\alpha}{۵\beta \times ۸\alpha} = \frac{۹}{۴۰}$$

*(هندسه) (ریاضی۲، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)*

---

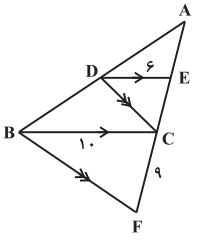
**۲– گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

با توجه به شکل و قضیه تالس داریم:

$$\triangle ABC: \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\triangle ABF: \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AF}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AF} \Rightarrow AC^{۲} = AE.AF \quad (*)$$




همچنین طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث $ABC$ $(DE \parallel BC)$ داریم:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{۶}{۱۰} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \begin{cases} AE = ۳t \\ AC = ۵t \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\xrightarrow{(*)} (۵t)^{۲} = ۳t(۵t+۹) \Rightarrow ۲۵t^{۲} = ۱۵t^{۲} + ۲۷t$$

$$\Rightarrow ۱۰t^{۲} = ۲۷t \xrightarrow{t \neq ۰} t = ۲/۷$$

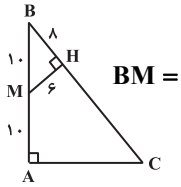
طول ضلع $AC$ برابر می‌شود با: $۵t = ۵ \times ۲/۷ = ۱۳/۵$

*(هندسه) (ریاضی۲، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)*

---

**۳– گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سؤال خواهیم داشت:



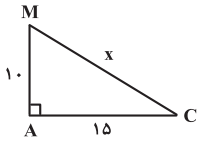

$$BM = MA = ۱۰$$

فیثاغورس : $BM^{۲} = MH^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow BH = ۸$

در دو مثلث $BMH$ و $ABC$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{B} \\ \hat{H} = \hat{A} \end{cases} \Rightarrow BMH \sim BCA \Rightarrow \frac{MH}{AC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{۶}{AC} = \frac{۸}{۲۰} \Rightarrow AC = ۱۵$$

خواهیم داشت:




$$x^{۲} = ۱۰۰ + ۲۲۵ = ۳۲۵ \Rightarrow x = ۵\sqrt{۱۳}$$

*(هندسه) (ریاضی۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۵)*

---

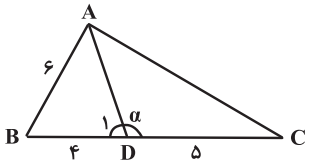
**۴– گزینهٔ «۲»** *(کیوان دارابی)*

دو مثلث $ABD$ و $ABC$ با هم متشابه هستند:

$$\begin{cases} \frac{BA}{BC} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳} \\ \frac{BD}{BA} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{BD}{BA}\ ,\ \hat{B} = \hat{B} \Rightarrow ABD \sim ABC$$

بنابراین $A\hat{D}B = B\hat{A}C$ است و در نتیجه داریم:

$$\alpha = ۱۸۰^{\circ} - A\hat{D}B \Rightarrow \alpha = ۱۸۰^{\circ} - B\hat{A}C = \hat{B} + \hat{C}$$




*(هندسه) (ریاضی۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۵)*

**۵- گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

مثلث‌های $OBC$ و $ODE$ به دلیل تساوی زوایایشان با هم متشابه هستند با فرض $EF = x$ داریم:

$$\frac{BC}{ED} = \frac{OC}{OF + EF} \xrightarrow{AD=BC} \frac{AD}{ED} = \frac{۴}{۲ + x} \qquad (۱)$$

از طرفی $AF \parallel DC$، پس طبق قضیهٔ تالس:

$$\frac{DA}{DE} = \frac{CF}{CE} \Rightarrow \frac{AD}{ED} = \frac{۶}{۶ + x} \qquad (۲)$$

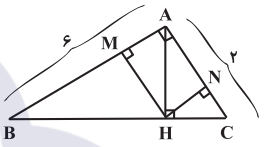
$$\xrightarrow{(۱)\,,\,(۲)} \frac{۴}{۲ + x} = \frac{۶}{۶ + x} \Rightarrow ۱۲ + ۶x = ۲۴ + ۴x \Rightarrow x = ۶$$

(هندسه) (ریاضی۲، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷ و ۴۲ تا ۴۵)

---

**۶- گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $ABC$ داریم:




$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۶^۲ + ۲^۲ = ۴۰ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۰}$$

از طرفی طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC$ داریم:

$$AB^۲ = BC \times BH \Rightarrow ۶^۲ = ۲\sqrt{۱۰} \times BH$$

$$\Rightarrow BH = \frac{۱۸}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۹}{۵}\sqrt{۱۰} \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{\frac{۹}{۵}\sqrt{۱۰}}{۲\sqrt{۱۰}} = \frac{۹}{۱۰} \Rightarrow \frac{CH}{BC} = \frac{۱}{۱۰}$$

حال طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC} : MH \parallel AC \Rightarrow \frac{MH}{AC} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{MH}{۲} = \frac{۹}{۱۰} \Rightarrow MH = ۱/۸$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : NH \parallel AB \Rightarrow \frac{NH}{AB} = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{NH}{۶} = \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow NH = ۰/۶$$

$$MH + NH = ۱/۸ + ۰/۶ = ۲/۴$$

(هندسه) (ریاضی۲، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷ و ۴۲ تا ۴۵)

---

**۷- گزینهٔ «۴»** *(کیوان دارابی)*

از آنجا که $FN \parallel AB$، طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث $ABC$ داریم:

$$FN \parallel AB \Rightarrow \frac{FN}{AB} = \frac{CN}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{CN}{BC} \Rightarrow \begin{cases} BN = x \\ CN = ۲x \end{cases}$$

از طرفی طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث $BCD$ داریم:

$$EN \parallel DC \Rightarrow \frac{EN}{DC} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{EN}{۲۴} = \frac{۱}{۳}$$

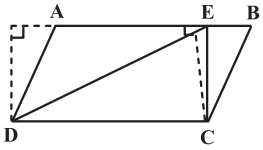
$$\Rightarrow EN = ۸ \Rightarrow EF = EN - FN = ۸ - ۲ = ۶$$

(هندسه) (ریاضی۲، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

---

**۸- گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

مطابق شکل دو مثلث $EBC$ و $ADE$ ارتفاع‌های برابر دارند، لذا نسبت مساحت‌های آن‌ها با نسبت قاعده‌های آن‌ها برابر است:




$$AB = ۵EB \Rightarrow \frac{EB}{AB} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{EB}{AB - EB} = \frac{۱}{۵ - ۱}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{EBC}}}{S_{\overset{\Delta}{ADE}}} = \frac{EB}{AE} = \frac{۱}{۴} = ۰/۲۵ = ۲۵٪$$

(هندسه) (ریاضی۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)

---

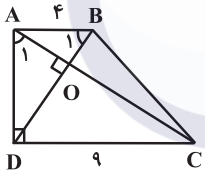
**۹- گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

مثلث‌های $ABD$ و $ACD$ با هم متشابه‌اند:

$$\left.\begin{matrix} \hat{A} = \hat{D} = ۹۰^\circ \\ \hat{B}_۱ = \hat{A}_۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{ACD}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AD^۲ = AB \times DC$$

$$\Rightarrow AD^۲ = ۴ \times ۹ = ۳۶ \Rightarrow AD = ۶ \qquad \text{(ارتفاع ذوزنقه)}$$




از طرفی مثلث‌های $OAB$ و $OCD$ نیز متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها همان نسبت دو ضلع متناظر یعنی $\frac{۴}{۹}$ می‌باشد. پس نسبت دو ارتفاع متناظر آن نیز $\frac{۴}{۹}$ است. اگر $h$ و $h'$ به ترتیب ارتفاع (وارد بر وتر) در این دو مثلث باشند، آن‌گاه:

$$\frac{h}{h'} = \frac{۴}{۹} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{h}{h + h'} = \frac{۴}{۱۳} \xrightarrow{h+h'=AD=۶} h = \frac{۲۴}{۱۳}$$

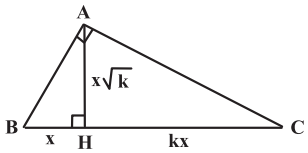
$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{۱}{۲} AB \times h = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times \frac{۲۴}{۱۳} = \frac{۴۸}{۱۳}$$

(هندسه) (ریاضی۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۵)

---

**۱۰- گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC$ داریم:




$$\begin{cases} AB^۲ = BH \times BC \\ AC^۲ = CH \times BC \end{cases} \Rightarrow \frac{AB^۲}{AC^۲} = \frac{BH}{CH} = \frac{x}{kx} = \frac{۱}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \sqrt{\frac{۱}{k}} = \frac{۱}{\sqrt{k}}$$

(هندسه) (ریاضی۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۵)

## ریاضی پایه–بسته۱

**۱– گزینهٔ «۴»** (نیما کریوریان)

با توجه به اطلاعات سوال داریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{4^{1-x}}{2^{x+1}}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{2^{2-2x}}{2^{x+1}}=2^{-2}$$

$$\Rightarrow 2^{2-2x-x-1}=2^{-2}\Rightarrow 2-2x-x-1=-2\Rightarrow x=1$$

$$a=4^{1-x}=4^{1-1}=1\ ,\ b=2^{x+1}=2^{1+1}=2^2=4$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=1^2+4^2=17$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی۲، صفحه ۱۰۳)

---

**۲– گزینهٔ «۲»** (شیوا امین)

ابتدا: $\log_3\sqrt[3]{x}=\frac{1}{3}\log_3 x$ . فرض می‌کنیم: $\sqrt{\log_3 x}=A$ :

$$\frac{1}{3}A^2=A+\frac{4}{3}\xrightarrow{\times 3}A^2=3A+4\Rightarrow A^2-3A-4=0$$

$$a+c=b\Rightarrow A=-1\qquad A=-\frac{c}{a}=\frac{-(-4)}{1}=4$$

$$\Rightarrow\sqrt{\log_3 x}=-1\quad \text{غ ق ق}$$

$$\sqrt{\log_3 x}=4\Rightarrow\log_3 x=16\Rightarrow x=3^{16}$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی۲، صفحه‌های ۱۱۲ و ۱۱۳)

---

**۳– گزینهٔ «۴»** (سامان سلامیان)

$$6^{1-x}=5^x\Rightarrow 6\times 6^{-x}=5^x\Rightarrow\frac{6}{6^x}=5^x$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین-وسطین}}6=5^x\times 6^x\Rightarrow 6=30^x$$

چون متغیر در نما است ، از طرفین لگاریتم در مبنای ۳۰ می‌گیریم:

$$\log_{30}^{6}=\log_{30}^{30^x}\Rightarrow\log_{30}^{6}=x\underbrace{\boxed{\log_{30}^{30}}}_{\text{یک}}\Rightarrow x=\log_{30}^{6}$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی۲، صفحه‌های ۱۰۹ و ۱۱۰)

---

**۴– گزینهٔ «۲»** (نیما کریوریان)

دو نقطه داده شده در نمودار را در ضابطه داده شده قرار می‌دهیم تا مقادیر $a$ و $b$ به دست آیند:

$$(1,0)\xrightarrow{f(1)=0}-8+(\frac{1}{2})^{a+b}=0\Rightarrow 2^3=2^{-a-b}\Rightarrow -a-b=3$$

$$(0,-4)\xrightarrow{f(0)=-4}-4=-8+(\frac{1}{2})^{b}\Rightarrow 4=2^2=2^{-b}\Rightarrow b=-2\checkmark$$

$$\Rightarrow a=-1\checkmark$$

$$f(x)=-8+(\frac{1}{2})^{-x-2}\Rightarrow f(-1)=-8+(\frac{1}{2})^{1-2}=-8+2=-6$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی۲، صفحه‌های ۱۱۵ و ۱۱۶)

---

**۵– گزینهٔ «۱»** (شیوا امین)

$$9^a=3\sqrt{3}\Rightarrow(3^2)^a=3^1\times 3^{\frac{1}{2}}\Rightarrow 3^{2a}=3^{\frac{3}{2}}\Rightarrow 2a=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

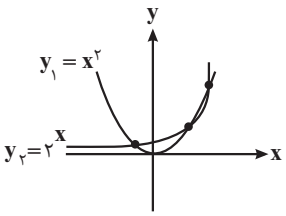
$$\log_3(8(\frac{3}{4})+3)=\log_3 9=\log_3 3^2=2$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی۲، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۰)

**۶– گزینهٔ «۴»** (سامان سلامیان)

از دو طرف ریشه پنجم می‌گیریم:

$$2^{5x}=x^{10}\Rightarrow(2^x)^5=(x^2)^5\Rightarrow\sqrt[5]{(2^x)^5}=\sqrt[5]{(x^2)^5}\Rightarrow x^2=2^x$$




می‌بینیم که $y_1$ و $y_2$ سه نقطه برخورد دارند و معادله ۳ ریشه دارد.

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی۲، صفحه ۱۰۳)

---

**۷– گزینهٔ «۱»** (سامان شرف قراپولو)

($E$ انرژی آزاد شده و $M$ شدت زلزله است)

$$\log E=11/8+1/5M$$

$$\log E_2=11/8+1/5M_2\ ,\ \log E_1=11/8+1/5M_1$$

$$\log E_2-\log E_1=11/8+1/5M_2-11/8-1/5M_1$$

$$\Rightarrow\log(\frac{E_2}{E_1})=1/5(M_2-M_1)$$

$$\xrightarrow{M_2-M_1=\frac{6}{5}}\log(\frac{E_2}{E_1})=\frac{3}{2}\times\frac{6}{5}\Rightarrow\log(\frac{E_2}{E_1})=\frac{18}{10}\Rightarrow\frac{E_2}{E_1}=10^{1/8}$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی۲، صفحهٔ ۱۱۷)

---

**۸– گزینهٔ «۴»** (محمدامین سالاری‌فر)

$$\log_3 5=y\ ,\ \log_2 3=x\Rightarrow\log_3 2=\frac{1}{x}$$

$$\log_{24}90=\frac{\log_3 90}{\log_3 24}=\frac{\log_3 9\times 5\times 2}{\log_3 2\times 2\times 2\times 3}=\frac{\log_3 9+\log_3 5+\log_3 2}{\log_3 3+3\log_3 2}$$

$$=\frac{2+y+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}=\frac{\frac{2x+xy+1}{x}}{\frac{x+3}{x}}=\frac{2x+xy+1}{x+3}$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی۲، صفحه‌های ۱۱۱ و ۱۱۲)

---

**۹– گزینهٔ «۱»** (سهیل حسن‌خان‌پور)

با توجه به شرط دامنه لگاریتم باید $|2x-a|>0$ باشد؛ پس

$$2x-a\neq 0\Rightarrow x\neq\frac{a}{2}$$

همان‌طور که در شکل مشخص است ، عدد ۳ از دامنه حذف شده است.

$$\frac{a}{2}=3\Rightarrow a=6$$

حال نقطه $(-1,17)$ را در تابع $f(x)$ جایگذاری می‌کنیم.

$$f(-1)=17\Rightarrow 3\log_b^{|2\times(-1)-6|}-1=17\Rightarrow\log_b^8=6\Rightarrow b^6=2^3\Rightarrow b=\pm\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{b>0}b=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{a}{b^2}=\frac{6}{(\sqrt{2})^2}=3$$

(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی۲، صفحه‌های ۱۱۵ و ۱۱۶)

**۱۰- گزینهٔ «۴»** *(علی‌اصغر شریفی)*

ابتدا مخرج عبارت‌های گنگ موجود در معادله را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۶}{\sqrt{۱۳}-۱}=\frac{۶}{\sqrt{۱۳}-۱}\times\frac{\sqrt{۱۳}+۱}{\sqrt{۱۳}+۱}=\frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲}$$

$$\frac{۲۷}{\sqrt{۵۲}-۵}=\frac{۲۷}{\sqrt{۵۲}-۵}\times\frac{\sqrt{۵۲}+۵}{\sqrt{۵۲}+۵}=\sqrt{۵۲}+۵=۵+۲\sqrt{۱۳}$$

سپس ارتباط بین دو عدد گنگ بالا را پیدا می‌کنیم:

$$\left(\frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲}\right)^{۳}=\frac{۱+۳\sqrt{۱۳}+۳۹+۱۳\sqrt{۱۳}}{۸}=\frac{۴۰+۱۶\sqrt{۱۳}}{۸}=۵+۲\sqrt{۱۳}$$

با تعریف $b=\left(\frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲}\right)^{x}$ معادلهٔ اولیه به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$b+b^{۳}=۳۰\Rightarrow b^{۳}+b-۳۰\Rightarrow(b-۳)(b^{۲}+۳b+۱۰)=۰$$

با توجه به آن که عبارت درجه دوم ریشه ندارد، پس تنها جواب معادله $b=۳$ است.

بنابراین:

$$\left(\frac{\sqrt{۱۳}+۱}{۲}\right)^{x}=۳\Rightarrow\log\left(\frac{\sqrt{۱۳}+۱}{۲}\right)^{x}=\log۳\Rightarrow x\log\left(\frac{\sqrt{۱۳}+۱}{۲}\right)=\log۳$$

$$\Rightarrow\frac{\log۳}{x}=\log\left(\frac{\sqrt{۱۳}+۱}{۲}\right)=\log(\sqrt{۱۳}+۱)-\log۲$$

$$\Rightarrow\frac{\log۳}{x}+\log۲=\log(\sqrt{۱۳}+۱)$$

پس $\beta=\sqrt{۱۳}+۱$ و خواهیم داشت:

$$[\beta]=[\sqrt{۱۳}+۱]=[\sqrt{۱۳}]+۱=۳+۱=۴$$

*(توابع نمایی و لگاریتمی) (ریاضی۲، صفحه‌های۱۱۲ و ۱۱۳ )*

---

## ریاضی پایه-بسته۲

**۱- گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

چون در هر آجیل، حداقل ۴ نوع خشکبار استفاده می‌شود، پس تعداد آجیل‌های مختلف که در این فروشگاه می‌توان درست کرد، برابر است با:

$$\binom{۷}{۴}+\binom{۷}{۵}+\binom{۷}{۶}+\binom{۷}{۷}=۳۵+۲۱+۷+۱=۶۴$$

نکته: می‌دانیم اگر $r+k=n$ باشد، آنگاه $\binom{n}{r}=\binom{n}{k}$ است، بنابراین

$\binom{۷}{۳}=\binom{۷}{۴}$ ، ... و $\binom{۷}{۷}=\binom{۷}{۰}$ است و در نتیجه داریم:

$$\binom{۷}{۴}+\ldots+\binom{۷}{۷}=\frac{\binom{۷}{۰}+\binom{۷}{۱}+\ldots+\binom{۷}{۷}}{۲}=\frac{۲^{۷}}{۲}=۲^{۶}=۶۴$$

*(شمارش، بدون شمردن) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۸)*

---

**۲- گزینهٔ «۲»** *(مصطفی دیداری)*

زیرمجموعه‌ها را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

الف) بزرگ‌ترین عضو برابر ۱۲ و کوچک‌ترین عضو برابر ۱ باشد:

$\{۱, \underbrace{○, ○, \ldots, ○}_{\text{۱۰ عضو که هر کدام ۲ حالت دارند (می‌توانند باشند یا نباشند)}}, ۱۲\} \Rightarrow$ تعداد $= ۲^{۱۰}$

ب) بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو برابر ۶ و ۲ باشند:

$\{۲, ○, ○, ○, ۶\} \Rightarrow$ تعداد $= ۲^{۳}$

پ) بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو ۴ و ۳ باشند:

$\{۳, ۴\} \Rightarrow$ تعداد $= ۱$

تعداد کل زیرمجموعه‌های مطلوب $= ۲^{۱۰}+۲^{۳}+۱=۱۰۲۴+۸+۱=۱۰۳۳$

*(شمارش، بدون شمردن) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۴)*

---

**۳- گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

برای فردی که برندهٔ مطلق می‌شود، ۴ انتخاب وجود دارد. فرض کنید از بین افراد $A_۱$ تا $A_۴$، شخص $A_۱$ برندهٔ مطلق باشد، در این صورت، طبق فرض ۲ یا ۳ داور، رأی برنده به $A_۱$ داده‌اند.

الف) در حالتی که $A_۱$ با ۲ رأی داوران، برندهٔ مطلق شده باشد، به $\binom{۳}{۲}$ حالت، ۲ رأی برنده از ۳ داور و به $۳-۱=۴$ حالت، رأی داور سوم (به فرد غیر $A_۱$) انتخاب دارد. پس در این حالت، به $\binom{۳}{۲}\times۳=۹$ وضعیت می‌توان فرد $A_۱$ را برندهٔ مطلق اعلام کرد.

ب) در حالتی که $A_۱$ با ۳ رأی داوران، برندهٔ مطلق شده باشد، فقط ۱ حالت وجود دارد و آن وقتی است که هر سه داور به شخص $A_۱$ رأی داده‌اند. پس تعداد حالاتی که در این مسابقه، برندهٔ مطلق وجود دارد، برابر است با:

$$۴\times(۹+۱)=۴۰$$

۴ حالت برای انتخاب فرد $A_۱$ از بین شرکت کننده‌ها است.

*(شمارش، بدون شمردن) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۸)*

---

**۴- گزینهٔ «۲»** *(علیرضا شریف‌فطبیی)*

اگر ارقام ۷ و ۵ را کنار بگذاریم، مجموعه ارقام $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۹\}$ را داریم که می‌خواهیم با آن‌ها عدد طبیعی ۴ رقمی بسازیم. در مورد تکراری نبودن ارقام، مطلبی بیان نشده؛ پس می‌توانیم تکرار هم داشته باشیم:

$$\underset{\downarrow}{۷}\times ۸\times ۸\times \underset{\downarrow}{۵} = ۲۲۴۰$$

۷: همهٔ ارقام به غیر از صفر — ۵: ارقام زوج $\{۰, ۲, ۴, ۶, ۸\}$

*(شمارش، بدون شمردن) (ریاضی۱، صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۱)*

**۵- گزینهٔ «۲»** *(شبنم غلامی)*

دو رقم ابتدای سمت چپ این عدد از نظر زوج یا فرد بودن ۴ حالت متفاوت دارد. تمام ارقام بعدی به‌طور منحصر به فرد از نظر زوج یا فرد بودن مشخص می‌شود. با توجه به این‌که ۲ رقم زوج و ۲ رقم فرد در اختیار داریم، تعداد اعداد ده رقمی در حالت‌های مختلف به صورت زیر است:

حالت اول : $\boxed{ز}\boxed{ز}$ $\quad \underline{ز}\times\underline{ز}\times\underline{ز}\times\underline{ز}\times\underline{ز}\times\underline{ز}\times\underline{ز}\times\underline{ز}=۲^{۱۰}$

حالت دوم : $\boxed{ف}\boxed{ز}$ $\quad \underline{ف}\times\underline{ف}\times\underline{ز}\times\underline{ف}\times\underline{ز}\times\underline{ف}\times\underline{ز}\times\underline{ف}=۲^{۱۰}$

حالت سوم : $\boxed{ز}\boxed{ف}$ $\quad \underline{ف}\times\underline{ز}\times\underline{ف}\times\underline{ف}\times\underline{ز}\times\underline{ف}\times\underline{ز}\times\underline{ف}=۲^{۱۰}$

حالت چهارم : $\boxed{ف}\boxed{ف}$ $\quad \underline{ف}\times\underline{ز}\times\underline{ف}\times\underline{ف}\times\underline{ز}\times\underline{ف}\times\underline{ز}\times\underline{ف}=۲^{۱۰}$

بنابراین تعداد کل اعداد مورد نظر برابر است با:

$$۴\times۲^{۱۰}=۲^{۲}\times۲^{۱۰}=۲^{۱۲}$$

*(شمارش، بدون شمردن) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۴)*

---

**۶- گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

برای محاسبهٔ تعداد اعداد ساخته شده، بهتر است مسئله را حالت‌بندی کنیم:

$$\begin{cases}\underline{\{۲\}}\times\underline{\begin{Bmatrix}۴\\۶\\۷\\۸\end{Bmatrix}}\times\underline{\quad}\times\underline{\quad}\times\underline{\quad}=۴۸\\ \underline{\begin{Bmatrix}۴\\۶\\۷\\۸\end{Bmatrix}}\times\underline{۵}\times\underline{\quad}\times\underline{\quad}\times\underline{\quad}=۲۴۰\end{cases}$$

$$\text{تعداد کل حالات}=۲۴۰+۴۸=۲۸۸$$

*(شمارش، بدون شمردن) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۴)*

---

**۷- گزینهٔ «۳»** *(مصطفی دیداری)*

ابتدا سه شهر متفاوت را انتخاب کرده و از این سه شهر، شهری را برمی‌گزینیم و از آن ۲ نفر برمی‌داریم. حال باید از هر یک از دو شهر باقیمانده، یک نفر را انتخاب کنیم. در نتیجه تعداد حالات مورد نظر برابر می‌شود با:

$$\binom{۵}{۳}\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}=۱۰\times۳\times۱۰\times۵\times۵=۷۵۰۰$$

*(شمارش، بدون شمردن) (ریاضی۱، صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۳۸)*

---

**۸- گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

از هر یک از ارقام **۱ ، ۳ ، ۴**، سه رقم داریم. پس اگر تمام اعداد چهاررقمی زوج که با ارقام **۱ ، ۳ ، ۴** می‌توان ساخت را بشماریم، باید اعدادی که بیش از سه رقم تکرار دارد را حذف کنیم:

کل اعداد ۴ رقمی زوج : $\boxed{۱}\times\boxed{۳}\times\boxed{۳}\times\boxed{۳}=۲۷$

**زوج**

تنها عدد ۴ رقمی زوج که هر ۴ رقم آن مثل هم هستند عدد ۴۴۴۴ است. پس:

$$\text{تعداد اعداد مورد نظر}=۲۷-۱=۲۶$$

*(شمارش، بدون شمردن) (ریاضی۱، صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۱)*

**۹- گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

فرض می‌کنیم وقتی ادویه شمارهٔ ۱ انتخاب شود، ادویهٔ ۲ حتماً باید انتخاب شده و ادویهٔ شمارهٔ ۳ برای ترکیب انتخاب نشود:

حالت اول: ادویهٔ ۱ انتخاب نشود: $\binom{۹}{۳}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶!}{۳!۶!}=۸۴$

حالت دوم: ادویهٔ ۱ انتخاب شود، پس ۲ باید انتخاب شده و ۳ انتخاب نشود.

پس ادویهٔ سوم از بین ۷ ادویهٔ باقی‌مانده انتخاب می‌شود: $\binom{۷}{۱}=۷$

در نتیجه تعداد طعم‌های مخصوص متمایزی که آشپز درست می‌کند، برابر می‌شود با:

$$۸۴+۷=۹۱$$

*(شمارش، بدون شمردن) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۳۸)*

---

**۱۰- گزینهٔ «۲»** *(عرشیا حسین‌زاده)*

ابتدا ۳ نفر از ۸ نفر را برای اتاق ۳ نفره و سپس ۴ نفر از ۵ نفر باقی‌مانده را برای اتاق ۴ نفره انتخاب می‌کنیم. $\binom{۸}{۳}\times\binom{۵}{۴}=۵۶\times۵=۲۸۰$

توجه کنید که نفر آخر به ۱ حالت در اتاق یک نفره قرار می‌گیرد.

*(شمارش، بدون شمردن) (ریاضی۱، صفحه‌های۱۲۳ تا ۱۳۸ )*

## ریاضی پایه بسته ۱

**۱- گزینهٔ «۱»** *(محسن اسماعیل پور)*

$$a_1 = -2$$

$$a_2 = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{-4}{3}$$

$$\Rightarrow a_1 \times a_2 \times ... \times a_{10} = -2 \times \frac{3}{2} \times \frac{-4}{3} \times ... \times \frac{11}{10} = -11$$

چون در ۵ جمله $n$ فرد است، پس حاصل ضرب ۱۰ جملهٔ اول عددی منفی است.

*(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴ تا ۲۰)*

---

**۲- گزینهٔ «۳»** *(لیلا مرادی)*

جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $t_n = t_1 q^{n-1}$ به دست می‌آید.

$$t_1 = (t_2)^2 \Rightarrow t_1 = (t_1 q^1)^2 \Rightarrow t_1 = t_1^2 q^2 \xrightarrow{\div t_1} t_1 q^2 = 1$$

$$t_4 = t_1 q^3 = 6$$

دو جملهٔ به دست آمده را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{t_1 q^3}{t_1 q^2} = \frac{6}{1} \Rightarrow q = 6 \Rightarrow t_1 (6)^2 = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{36}$$

*(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)*

---

**۳- گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا اصغریان)*

دنبالهٔ حاصل یک دنبالهٔ درجه دوم می‌باشد و در دنبالهٔ درجه دوم، اختلاف بین جملات یک الگوی حسابی تشکیل می‌دهند.

$$\overset{2}{\underset{+2}{\curvearrowright}}, \overset{4}{\underset{+5}{\curvearrowright}}, \overset{9}{\underset{+8}{\curvearrowright}}, \overset{17}{\underset{+11}{\curvearrowright}}, 28, ...$$

$$\overset{+3}{\curvearrowright} \quad \overset{+3}{\curvearrowright} \quad \overset{+3}{\curvearrowright}$$

جملهٔ اول این الگوی حسابی ۲ و قدرنسبت آن ۳ می‌باشد و جملهٔ نهم این الگوی حسابی برابر با اختلاف جملات نهم و دهم الگوی درجه دوم می‌باشد.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 2 + (n-1)3 = 3n - 1 \Rightarrow a_9 = 3(9) - 1 = 26$$

*(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴ تا ۲۳)*

---

**۴- گزینهٔ «۴»** *(فرهاد سرابی کلهر)*

$n = 1 \Rightarrow (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ عددصحیح ندارد

$n = 2 \Rightarrow (\frac{1}{4}, 1)$ عددصحیح ندارد

$n = 3 \Rightarrow (\frac{1}{5}, \frac{4}{3})$ ۱✓

$n = 4 \Rightarrow (\frac{1}{6}, \frac{5}{3})$ ۱✓

$n = 5 \Rightarrow (\frac{1}{7}, 2)$ ۱✓

---

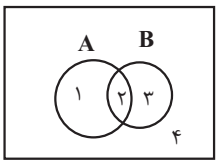
$n = 6 \Rightarrow (\frac{1}{8}, \frac{7}{3})$ ۲عددصحیح‌دارد

به ازای $n \geq 6$، این بازه دارای حداقل دو عدد صحیح «۱» و «۲» می‌باشد؛ بنابراین فقط $n = 3,4,5$ قابل قبولند.

*(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۲ تا ۷)*

---

**۵- گزینهٔ «۱»** *(سعید صفرزاده)*




$$(A - B)' = \{2,3,4\}$$

$$A \cup B = \{1,2,3\}$$

$$A' = \{3,4\}$$

پس: $\{2,3,4\} \cap \{1,2,3\} \cap \{3,4\} = \{3\}$

که مجموعهٔ $B - A$ را نشان می‌دهد.

*(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸ تا ۱۳)*

---

**۶- گزینهٔ «۳»** *(بهوار زنگنه قاسم‌آبادی)*

$$n(A \cap B) = x$$

فرض کنید:

$$\frac{1}{3} n(A) = n(A \cap B) \Rightarrow n(A) = 3n(A \cap B) = 3x$$

$$\frac{2}{5} n(B) = n(A \cap B) \Rightarrow n(B) = \frac{5}{2} n(A \cap B) = \frac{5}{2} x$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 45$$

$$3x + \frac{5}{2} x - x = 45 \Rightarrow x = 10$$

*(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸ تا ۱۳)*

---

**۷- گزینهٔ «۴»** *(احمدرضا ذاکرزاده)*

اگر $a$ ، $b$ و $c$ به ترتیب سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند، همواره رابطهٔ $2b = a + c$ برقرار است. پس داریم:

$$2(2x) = 2 + x + x - 4 \Rightarrow 4x = 2x - 2 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

دنبالهٔ اصلی: $1, -2, -5, ...$

اگر جملات دنبالهٔ فوق را در $\frac{2k}{5}$ ضرب کنیم، داریم:

$$\frac{2k}{5}, \frac{-4k}{5}, -\frac{10k}{5}, ...$$

$$d' = -\frac{4k}{5} - \frac{2k}{5} = -\frac{6k}{5} = 6 \Rightarrow k = -5$$

$$\frac{k}{x} = \frac{-5}{-1} = 5$$

*(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)*

**۸- گزینهٔ «۲»** *(فرهاد سرابی کلهر)*

شکل‌ها شامل یک الگوی مثلثی و یک الگو با رابطهٔ $۲n$ می‌باشد.

تعداد نقطه‌های رنگی در الگوی مثلثی در شکل یازدهم:

$$\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{۱۱\times ۱۲}{۲}=۶۶$$

در الگو با رابطهٔ $۲n$، نیمی از نقاط رنگی هستند؛ بنابراین:

$$\frac{۲n}{۲}=n=۱۱$$

تعداد نقاط رنگی در شکل یازدهم: $۶۶+۱۱=۷۷$

*(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴ تا ۲۰)*

---

**۹- گزینهٔ «۴»** *(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۲)*

$a_۲, ۲a_۵, a_۸$ سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی‌اند، پس:

$$۲a_۵=\frac{a_۲+a_۸}{۲}\Rightarrow ۲a_۱q^۴=\frac{a_۱q+a_۱q^۷}{۲}\Rightarrow ۴q^۳=۱+q^۶$$

$$\Rightarrow q^۶-۴q^۳+۱=۰\xrightarrow{q^۳=t}t^۲-۴t+۱=۰$$

$$\Rightarrow t=\frac{۴\pm ۲\sqrt{۳}}{۲}=۲\pm\sqrt{۳}\rightarrow q^۳=۲\pm\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow q=\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}}\ \text{و}\ q=\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۳}}$$

با فرض افزایشی بودن دنباله، جمله‌ی هشتم بزرگترین جمله است و در نتیجه $q=\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}}$، پس:

$$\frac{a_۸}{a_۲}=\frac{a_۱q^۷}{a_۱q}=q^۶=(۲+\sqrt{۳})^۲=۷+۴\sqrt{۳}$$

*(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی ۱،صفحه‌های ۲۳ و ۲۶ ) (ریاضی ۲،صفحه ۱۱)*

---

**۱۰- گزینهٔ «۴»** *(علی اصغر شریفی)*

اگر اجتماع و اشتراک دو مجموعه برابر باشند، آن دو مجموعه با هم برابرند. پس $A=B$. اعضای $A$ جملات اول و دوم و چهارم یک دنباله حسابی هستند؛ پس بین اعضای آن رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{۲a+(a+۳d)}{۳}=(a+d)\Rightarrow ۲a+(a+۳d)=۳(a+d)$$

چون دو مجموعهٔ $A$ و $B$ با هم برابرند، پس این رابطه بین اعضای مجموعهٔ $B$ نیز باید برقرار باشد. یعنی اگر $B=\{x,y,z\}$ باید رابطهٔ $۲x+y=۳z$ برقرار باشد. با توجه به این که $B$ سه عضو دارد، به $۳!=۶$ حالت می‌توان این رابطه را تشکیل داد:

حالت اول: $۲b+bq^۲=۳bq\Rightarrow q^۲-۳q+۲=۰\Rightarrow q=۱,۲$

حالت دوم: $۲bq^۲+b=۳bq\Rightarrow ۲q^۲-۳q+۱=۰\Rightarrow q=۱,\frac{۱}{۲}$

حالت سوم: $۲b+bq=۳bq^۲\Rightarrow ۳q^۲-q-۲=۰\Rightarrow q=۱,\frac{-۲}{۳}$

حالت چهارم: $۲bq+b=۳bq^۲\Rightarrow ۳q^۲-۲q-۱=۰\Rightarrow q=۱,\frac{-۱}{۳}$

حالت پنجم: $۲bq+bq^۲=۳b\Rightarrow q^۲+۲q-۳=۰\Rightarrow q=۱,-۳$

حالت ششم: $۲bq^۲+bq=۳b\Rightarrow ۲q^۲+q-۳=۰\Rightarrow q=۱,\frac{-۳}{۲}$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای $q$ برابر است با

$$۱+۲+\frac{۱}{۲}-\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}-۳-\frac{۳}{۲}=-۲$$

*(مجموعه، الگو و دنباله) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۲ تا ۲۷)*

---

## ریاضی پایه بسته ۲

**۱- گزینهٔ «۱»** *(نیلوفر مهروی)*

اگر پیشامد مضرب ۳ بودن را با $A$ و پیشامد مضرب ۷ بودن را با $B$ نشان دهیم، داریم:

$$P(A)=\frac{[\frac{۱۴۴}{۳}]-[\frac{۲۴}{۳}]}{۱۲۰}=\frac{۴۸-۸}{۱۲۰}=\frac{۴۰}{۱۲۰}$$

$$P(A\cap B)=\frac{[\frac{۱۴۴}{۲۱}]-[\frac{۲۴}{۲۱}]}{۱۲۰}=\frac{۶-۱}{۱۲۰}=\frac{۵}{۱۲۰}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۴۰}{۱۲۰}-\frac{۵}{۱۲۰}=\frac{۳۵}{۱۲۰}=\frac{۷}{۲۴}$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)*

---

**۲- گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

فضای نمونهٔ این آزمایش ۳۶ عضو دارد و حالت‌هایی که مجموع دو تاس برابر ۷ می‌شود در جدول زیر مشخص شده است:

| | ۲ | ۲ | ۳ | ۴ | ۴ | ۵ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۲ | | | | | | ۷ |
| ۲ | | | | | | ۷ |
| ۳ | | | | ۷ | ۷ | |
| ۴ | | | ۷ | | | |
| ۴ | | | ۷ | | | |
| ۵ | ۷ | ۷ | | | | |

بنابراین احتمال رخ دادن پیشامد خواسته شده برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۳۶}=\frac{۲}{۹}$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)*

---

**۳- گزینهٔ «۴»** *(نیلوفر مهروی)*

نکته:

۱) اگر $A$ و $B$ دو پیشامد مستقل باشند، داریم: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

۲) همچنین اگر $A$ و $B$ مستقل باشند، آنگاه هر یک از دو پیشامد $A$ و $A'$ نسبت به هر دو پیشامد $B$ و $B'$ مستقل است. طبق فرض داریم:

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B')=\frac{۱}{۷}\Rightarrow P(A)P(B')=\frac{۱}{۷}\\ P(A'\cap B')=\frac{۳}{۷}\Rightarrow P(A')P(B')=\frac{۳}{۷}\end{array}\right\}\xrightarrow{+}$$

$$P(B')(\underbrace{P(A)+P(A')}_{۱})=\frac{۴}{۷}\Rightarrow P(B')=\frac{۴}{۷}\Rightarrow P(B)=\frac{۳}{۷}$$

$$P(A)\times\frac{۴}{۷}=\frac{۱}{۷}\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین احتمال رخ دادن هر دو پیشامد $A$ و $B$ برابر می‌شود با:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۷}=\frac{۳}{۲۸}$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۰)*

---

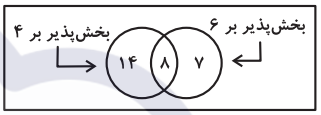
**۴- گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

$[\frac{۹۹}{۴}]-[\frac{۹}{۴}]=۲۲$ : تعداد اعداد طبیعی دو رقمی بخش‌پذیر بر ۴

$[\frac{۹۹}{۶}]-[\frac{۹}{۶}]=۱۵$ : تعداد اعداد طبیعی دو رقمی بخش‌پذیر بر ۶

$[\frac{۹۹}{۱۲}]-[\frac{۹}{۱۲}]=۸$ : تعداد اعداد طبیعی دو رقمی بخش‌پذیر بر ۱۲

مطابق نمودار ون زیر، احتمال موردنظر برابر می‌شود با:




$$\Rightarrow P(A)=\frac{۷}{۷+۱۴}=\frac{۷}{۲۱}=\frac{۱}{۳}$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)*

---

**۵- گزینهٔ «۳»** *(مصطفی دیداری)*

فرض می‌کنیم تعداد فرزندان هر خانواده $n$ نفر باشد. طبق فرض، احتمال آن‌که هر سه بلیط به فرزندان خانوادهٔ $B$ برسد، برابر می‌شود با:

$$\frac{\binom{n}{۳}}{\binom{۲n}{۳}}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow\frac{\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳\times۲\times۱}}{\frac{(۲n)(۲n-۱)(۲n-۲)}{۳\times۲\times۱}}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۲n(۲n-۱)(۲)(n-۱)}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow\frac{n-۲}{۲n-۱}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳n-۶=۲n-۱\Rightarrow n=۵$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱*

---

**۶- گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

می‌دانیم شرط، فضای نمونه‌ای را به خود محدود می‌کند. فضای نمونهٔ محدود شده عبارت است:

$$\{\underbrace{(۳,۴)}_{(۴)},\underbrace{(۲,۳)}_{(۴)},\underbrace{(۱,۴)}_{(۴)},\underbrace{(۱,۲)}_{(۴)},\underbrace{(۱,۱)}_{(۱)}\}\rightarrow\text{تعداد حالت‌ها}$$

برای $(۱,۱)$ فقط یک حالت وجود دارد که غیرهم‌رنگ می‌باشند.

برای هر کدام از زوج‌ها مثلاً $(۲,۱)$، چهار حالت وجود دارد (هر دو سفید / هر دو سیاه / یکی سفید و دیگری سیاه و برعکس): لذا در کل با شرط داده شده، ۱۷ حالت وجود خواهد داشت که ۸ حالت آن هم‌رنگ و ۹ حالت آن غیرهم‌رنگ‌اند.

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۶*

---

**۷- گزینهٔ «۱»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

تعداد حالت‌هایی که دو حرف یکسان کنار هم نباشند:

$$\bigcirc\ b\ \bigcirc\ c\ \bigcirc\ d\ \bigcirc\ e\ \bigcirc\Rightarrow n(A)=۴!\times\binom{۵}{۳}$$

تعداد حالت‌هایی که دو حرف یکسان کنار هم نباشند و با $a$ شروع شود:

$$a\ \ b\ \bigcirc\ c\ \bigcirc\ d\ \bigcirc\ e\ \bigcirc\Rightarrow n(B)=۴!\times\binom{۴}{۲}$$

در نتیجه احتمال شرطی مورد نظر به صورت زیر می‌شود:

$$P(B\mid A)=\frac{۴!\times\binom{۴}{۲}}{۴!\times\binom{۵}{۳}}=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۶)*

---

**۸- گزینهٔ «۴»** *(علیرضا شریف‌فطیبی)*

پیشامد خارج کردن سیب از ظرف اول، مستقل از پیشامد خارج کردن سیب از ظرف دوم است. بنابراین:

دو پیشامد زیر مستقل از هم هستند و داریم:

$A$ : پیشامد همرنگ بودن سیب‌های خارج شده از ظرف اول

$B$ : پیشامد غیرهمرنگ بودن سیب‌های خارج شده از ظرف دوم

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

$$P(A\cap B)=\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}}{\binom{۵}{۲}}\times\frac{\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۲}}$$

$$=\frac{۴}{۱۰}\times(\frac{۱۲}{۲۱})=\frac{۲}{۵}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۸}{۳۵}$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۰)*

---

**۹- گزینهٔ «۱»** *(نیلوفر مهدوی)*

از رابطهٔ $A\subseteq B$، نتیجه می‌گیریم $B'\subseteq A'$ و بنابراین در صورت وقوع پیشامد $B'$، پیشامد $A'$ نیز حتماً رخ داده است. یعنی $P(A'\mid B')=۱$.

حال احتمال وقوع پیشامد $B$ به شرط رخ دادن پیشامد $A'$ را محاسبه می‌کنیم.

$$P(B\mid A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{P(B-A)}{P(A')}=\frac{P(B)-P(A)}{P(A')}$$

$$=\frac{\frac{۷}{۱۰}-\frac{۱}{۵}}{\frac{۴}{۵}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۴}{۵}}=\frac{۵}{۸}$$

بنابراین حاصل عبارت صورت سؤال برابر است با:

$$\frac{P(A'|B')}{P(B|A')}=\frac{۱}{\frac{۵}{۸}}=\frac{۸}{۵}$$

تذکر: چون $A\subseteq B$ است، پس $A\cap B=A$ و در نتیجه داریم:

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۴۶)*

---

**۱۰- گزینهٔ «۲»** *(عباس الهی)*

با توجه به صورت سوال، احتمال سالم بودن محصول تولیدی خطها برابر است با:

$$P(A)=۰/۸\ ,\ \ P(B)=۰/۶$$

احتمال این‌که فقط یکی از محصولات سالم باشد برابر می‌شود با:

$$P(\underbrace{(A-B)\cup(B-A)}_{C})=P(A\cup B)-P(A\cap B)$$

$$=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$$

$$=۰/۸+۰/۶-۲\times(۰/۸\times۰/۶)=۱/۴-۰/۹۶=۰/۴۴$$

در نتیجه احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(B|C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{P(B-A)}{P(C)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(C)}$$

$$=\frac{۰/۶-(۰/۸\times۰/۶)}{۰/۴۴}=\frac{۰/۶-۰/۴۸}{۰/۴۴}=\frac{۰/۱۲}{۰/۴۴}=\frac{۱۲}{۴۴}=\frac{۳}{۱۱}$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۴ تا ۱۵۰)*

## ریاضی پایه بسته ۱

**۱- گزینهٔ «۴»** *(فهیمه ولی‌زاده)*

گزینهٔ «۴» صحیح است.

*(آمار و احتمال)(ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۷)*

---

**۲- گزینهٔ «۳»** *(اغشین خاصّه خان)*

$$\left|\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{18}+15/5+17/5}{20}-\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{18}+11/5+7/5}{20}\right|$$

$$=\left|\frac{33-19}{20}\right|=\frac{14}{20}=0/7$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۳ و ۱۵۴)*

---

**۳- گزینهٔ «۲»** *(علی غریبی)*

$$10,13,13,14,15,19 \Rightarrow \bar{x}=14$$

اگر عددی که برابر میانگین است را حذف کنیم، میانگین تغییری نخواهد کرد بنابراین عدد ۱۴ را حذف می‌کنیم.

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۳و ۱۵۴)*

---

**۴- گزینهٔ «۲»** *(وحید راهتی)*

$$R=\max-\min \xrightarrow{\text{دوحالت دارد}} \begin{cases} \max=k \Rightarrow k-2=16 \Rightarrow \overbrace{k=18}^{\text{ق ق}} \in N \\ \text{یا} \\ \min=k \Rightarrow 14-k=16 \Rightarrow \underbrace{k=-2}_{\text{غ ق ق}} \notin N \end{cases}$$

$$k=18 \xrightarrow{\text{داده‌ها را مرتب می‌کنیم}} \underbrace{2,3,3,7}_{\text{میانه}=7/5},8,10,14,18$$

$$\bar{x}=\frac{2+3+3+7}{4}=\frac{15}{4}$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۷)*

---

**۵- گزینهٔ «۲»** *(فهیمه ولی‌زاده)*

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$1/2,2/1,\ 3/5,\ 3/7,\ 4/7,\ 5/8,\ 8/7,\ 9/1$$

$$Q_2 \Rightarrow \frac{3/7+4/7}{2}=4/2$$

$$Q_1 \Rightarrow 1/2,2/1,3/5,3/7 \Rightarrow Q_1=\frac{2/1+3/5}{2}=2/8$$

$$Q_3 \Rightarrow 4/7,\ 5/8,\ 8/7,\ 9/1 \Rightarrow Q_3=\frac{5/8+8/7}{2}=7/25$$

$$\Rightarrow \frac{2Q_1-Q_2+Q_3}{Q_1+Q_3}=\frac{\overset{5/6}{\cancel{2(2/8)}}-4/2+7/25}{2/8+7/25}=\frac{8/65}{10/05}=0/86$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۶۱ و ۱۶۲)*

---

**۶- گزینهٔ «۱»** *(سیدعباس حسینی)*

$$x^2+x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}} \\ x_2=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma^2=\frac{(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}-(-\frac{1}{2}))^2+(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}-(-\frac{1}{2}))^2}{2}$$

$$=\frac{\frac{5}{4}+\frac{5}{4}}{2}=\frac{5}{4}=1/25$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۷ تا ۱۶۰)*

---

**۷- گزینهٔ «۲»** *(وحید راهتی)*

واریانس داده‌های آماری زمانی برابر صفر است که داده‌ها همه با هم برابر باشند، پس داریم:

$$a-2=2b=c+3=4 \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

$$6,2,1,5,6,4 \Rightarrow \bar{x}=\frac{6+2+1+5+6+4}{6}=\frac{24}{6}=4$$

$$\sigma^2=\frac{(6-4)^2+(2-4)^2+(1-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2+(4-4)^2}{6}$$

$$=\frac{22}{6}=\frac{11}{3}$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۷ تا ۱۶۰)*

---

**۸- گزینهٔ «۲»** *(وحید عبدالملکی)*

می‌دانیم که اگر داده‌ها را در عددی مانند $a$ ضرب کنیم، میانگین در $a$ و انحراف معیار در $|a|$ ضرب می‌شود و هم‌چنین اگر داده‌ها را با عددی مانند $b$ جمع کنیم، میانگین نیز با آن عدد جمع می‌شود؛ ولی انحراف معیار تغییر نمی‌کند. بنابراین داریم:

$$2\bar{X}+1=27 \Rightarrow \bar{X}=13$$

$$2\sigma=10 \Rightarrow \sigma=5$$

$$\text{ضریب تغییرات}=\frac{3\times5}{3\times13-4}=\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۷ تا ۱۶۰)*

**۹- گزینهٔ «۴»** *(سراسری دی ماه ۱۴۰۱)*

**اعداد زوج متوالی را به‌ترتیب $a+۲$ و $a$ و $a-۲$ در نظر می‌گیریم:**

$$a-۲,a,a+۲ \Rightarrow \bar{x}=a\ ,\ \sigma^۲=\frac{(-۲)^۲+(۰)^۲+(۲)^۲}{۳}=\frac{۸}{۳}\Rightarrow \sigma=\sqrt{\frac{۸}{۳}}$$

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{\frac{۸}{۳}}}{a} \xrightarrow[\text{باید بزرگ‌ترین } a \text{ را داشته باشیم.}]{\text{برای کوچک‌ترین ضریب تغییرات}} ۹۴,۹۶,۹۸ \rightarrow a=۹۶$$

$$\Rightarrow CV=\frac{\sqrt{\frac{۸}{۳}}}{۹۶}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۹۶\sqrt{۳}}=\frac{۴}{۹۶\sqrt{۶}}=\frac{۱}{۲۴\sqrt{۶}}$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۶۰)*

---

**۱۰- گزینهٔ «۳»** *(علی اصغر شریفی)*

داده‌ها را $a$، $b$، $c$، $d$ و صفر در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$\frac{a+b+c+d+۰}{۵}=۴\Rightarrow a+b+c+d=۲۰\Rightarrow \bar{x}_{new}=\frac{a+b+c+d}{۴}=۵$$

پس میانگین داده‌های جدید ۵ است. طبق رابطهٔ بین انحراف معیار داده‌های اولیه و جدید داریم:

$$CV_{new}=۰/۸\times CV_{old}\Rightarrow \frac{\sigma_{new}}{۵}=۰/۸\times\frac{\sigma_{old}}{۴}\Rightarrow \sigma_{old}=\sigma_{new}$$

یعنی با حذف صفر، واریانس تغییر نمی‌کند. پس واریانس را در دو حالت می‌نویسیم و برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{(a-۴)^۲+(b-۴)^۲+(c-۴)^۲+(d-۴)^۲+(۰-۴)^۲}{۵}$$

$$=\frac{(a-۵)^۲+(b-۵)^۲+(c-۵)^۲+(d-۵)^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow ۴(a-۴)^۲+۴(b-۴)^۲+۴(c-۴)^۲+۴(d-۴)^۲+۴\times ۱۶$$

$$=۵(a-۵)^۲+۵(b-۵)^۲+۵(c-۵)^۲+۵(d-۵)^۲$$

در سمت راست معادلهٔ بالا، ۵ برابر تعدادی عبارت را مشاهده می‌کنیم. اگر ۴ برابر این عبارات را به سمت چپ منتقل کنیم، به معادلاتی مشابه زیر می‌رسیم:

$$۴(a-۴)^۲-۴(a-۵)^۲+۱۶=۴(a^۲-۸a+۱۶)-۴(a^۲-۱۰a+۲۵)+۱۶$$

$$=۸a-۲۰$$

اگر محاسبات بالا را برای $b$ و $c$ و $d$ تکرار کنیم، داریم:

$$(a-۵)^۲+(b-۵)^۲+(c-۵)^۲+(d-۵)^۲=$$

$$(۸a-۲۰)+(۸b-۲۰)+(۸c-۲۰)+(۸d-۲۰)$$

$$=۸(a+b+c+d-۱۰)=۸(۲۰-۱۰)=۸۰$$

با توجه به برابری واریانس داده‌های اولیه و جدید، واریانس داده‌های اولیه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^۲_{old}=\sigma^۲_{new}=\frac{(a-۵)^۲+(b-۵)^۲+(c-۵)^۲+(d-۵)^۲}{۴}=\frac{۸۰}{۴}=۲۰$$

*(آمار و احتمال) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۷ تا ۱۶۰)*

## ریاضی پایه بسته۱

**۱- گزینهٔ «۴»** *(سیدرضا اسلامی)*

فرض می‌کنیم زهرا و سارا به تنهایی کار را به ترتیب در $m$ و $n$ روز تمام کنند. بنابراین در هر روز زهرا $\frac{۱}{m}$ کار و سارا $\frac{۱}{n}$ کار را انجام می‌دهد و با توجه به فرضیات مسئله داریم:

$$\begin{cases}۲(\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n})+\frac{۶}{n}=۱\\ ۶(\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n})+\frac{۳}{m}=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۲}{m}+\frac{۸}{n}=۱\\ \frac{۹}{m}+\frac{۶}{n}=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{m}+\frac{۸}{n}=\frac{۹}{m}+\frac{۶}{n}\Rightarrow \frac{۲}{n}=\frac{۷}{m}\Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{۷}{۲}$$

دقت کنید که طبق خواستهٔ سوال، جواب برابر $\frac{n}{m}$ است.

*(هندسه تحلیلی و بردار) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)*

---

**۲- گزینهٔ «۳»** *(مهسان کودرزی)*

با توجه به این‌که $P(۳)$ تعریف نشده است، بنابراین $x=۳$ ریشهٔ مخرج است:

$$۲\times ۳-b=۰\Rightarrow b=۶$$

حال ریشه‌های عبارت $x-۲\sqrt{x}-۳$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x-۲\sqrt{x}-۳=۰\Rightarrow(\sqrt{x}-۳)(\sqrt{x}+۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=۳\Rightarrow x=۹\\ \sqrt{x}=-۱\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

با توجه به این‌که عبارت $P(x)$ فقط در اطراف $x=۳$ تغییر علامت داده است، باید $x=۹$ ریشهٔ عبارت $ax+۳$ نیز باشد تا $x=۹$ ریشهٔ مضاعف باشد و تغییر علامت نداشته باشیم، پس:

$$a(۹)+۳=۰\Rightarrow ۹a=-۳\Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه داریم:

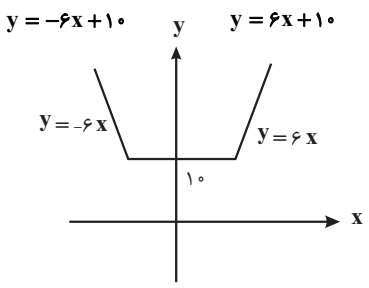
$$b-۳a=۶-(-۱)=۷$$

*(معادله ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۸۸)*

---

**۳- گزینهٔ «۲»** *(جوانبخش نیکنام)*

با توجه به نمودار تابع $y=|۳x+۵|+|۳x-۵|$ در شکل زیر داریم:



خط $y = mx + ۱۰$، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند و برای این‌که معادله دو جواب داشته باشد باید شیب خط، کوچک‌تر از ۶ و بیشتر از ۶- بوده و مخالف صفر باشد:

$$m \in (-۶ , ۶) - \{۰\}$$

$$\Rightarrow m = -۵ , -۴ , -۳ , -۲ , -۱ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵$$

*(معادله ها و نامعادله ها) (ریاضی۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)*

---

**۱۴- گزینهٔ «۲»** *(علی آزاد)*

با توجه به این‌که جواب نامعادله و داده شده بـه صـورت $(-\infty , ۳]$ اسـت و یکـی از ریشه‌هـای $p(x) = (-۲x^۲ + ۴ax + b)(x-۱)$ برابـر $x = ۱$ اسـت، لـذا $p(x)$ باید در $x = ۱$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد و جدول تعیین علامـت آن بـه صـورت زیـر است:

| $x$ | | $۱$ | | $۳$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | $+$ | $۰$ | $+$ | $۰$ | $-$ |

در نتیجه $x = ۱$ و $x = ۳$ ریشه‌هـای معادلـهٔ $-۲x^۲ + ۴ax + b = ۰$ هسـتند و داریم:

$$\begin{cases} -۲ + ۴a + b = ۰ \\ -۱۸ + ۱۲a + b = ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۸a = ۱۶ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow b = -۶$$

در نتیجه:

$$a + b = -۴ .$$

*(معادله ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۸۸)*

---

**۱۵- گزینهٔ «۳»** *(سینا خیرخواه)*

ابتدا جواب معادله رادیکالی داده شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\sqrt{۱۲ + x} - ۲ = \sqrt{۲x + ۷}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱۲ + x + ۴ - ۴\sqrt{۱۲ + x} = ۲x + ۷$$

$$\Rightarrow x - ۹ = -۴\sqrt{۱۲ + x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲ - ۱۸x + ۸۱ = ۱۶(۱۲ + x)$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۳۴x - ۱۱۱ = ۰ \Rightarrow (x - ۳۷)(x + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ \\ x = ۳۷ \end{cases}$$

مقدار $x = ۳۷$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند. بنـابراین جـواب معادلـه (مقـدار $m$) برابر ۳- است. حال با جای‌گذاری مقدار $m = -۳$ در معادلهٔ دوم داریم:

$$\frac{۲}{x} - \frac{-۳x - ۳}{x^۲} = ۲ \Rightarrow \frac{۲}{x} + \frac{۳x + ۳}{x^۲} = ۲$$

$$\xrightarrow{\times x^۲} ۲x + ۳x + ۳ = ۲x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ - ۵x - ۳ = ۰$$

$$\xrightarrow{\Delta > ۰ \ , \ x \neq ۰} S = \frac{۵}{۲}$$

*(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)*

---

**۶- گزینهٔ «۴»** *(میلاد منصوری)*

با فرض $a > ۰$ داریم:

$$-۵ < ax < ۵ \Rightarrow -\frac{۵}{a} < x < \frac{۵}{a}$$

دقت می‌کنیم که بازهٔ $(-۵,۵)$ شامل ۹ عدد صحیح است. پس باید داشته باشیم:

$$۴ < \frac{۵}{a} \leq ۵ \Rightarrow ۱ \leq a < \frac{۵}{۴}$$

دقت شود که $-۴ < \frac{-۵}{a} \leq -۵$ هم برقرار است.

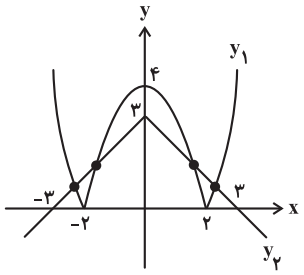
*(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)*

---

**۷- گزینهٔ «۴»** *(علیرضا نراف‌زاده)*

$$|x| + |۴ - x^۲| = ۳ \Rightarrow |۴ - x^۲| = ۳ - |x|$$

ایـن یعنـی تعـداد جـواب‌هـای معادلـهٔ مـذکور، تعـداد نقـاط تقـاطع نمودارهـای $y_۱ = |۴ - x^۲|$ و $y_۲ = ۳ - |x|$ است.




بنابراین معادله چهار جواب دارد.

*(معادله و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۸۸)*

---

**۸- گزینهٔ «۴»** *(سراسری دی ماه ۱۴۰۱)*

ابتدا شرط مثبت بودن زیر رادیکال را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x - ۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۲ \\ ۲ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = ۲$$

تنها مقدار قابل قبول برای معادله $x = ۲$ است که آن را در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$\sqrt{۱} = \sqrt{۲} - ۰ \quad \times$$

چون $x = ۲$ در معادله صدق نکرد، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

*(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی۲ صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)*

---

**۹- گزینهٔ «۳»** *(مهرداد ملوندی)*

طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x+۱) + ۴ + ۴\sqrt{x+۱} = ۴(x+۲) \Rightarrow ۴\sqrt{x+۱} = ۳x + ۳$$

مجدداً طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۱۶(x+۱) = ۹(x+۱)^۲ \Rightarrow (x+۱)(۹(x+۱) - ۱۶) = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)(۹x - ۷) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۷}{۹} \ , \ -۱$$

هر دو جواب به دست آمده در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند؛ پس معادله ۲ جواب دارد.

*(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴)*

**۱۰- گزینهٔ «۴»** *(بهانبخش نیکنام)*

معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\underset{(x+2)-(x+1)}{\uparrow}\quad \underset{(x+4)-(x+2)}{\uparrow}\quad \underset{(x+7)-(x+4)}{\uparrow}$$

$$\frac{۱}{(x+۲)(x+۱)}+\frac{۲}{(x+۴)(x+۲)}+\frac{۳}{(x+۷)(x+۴)}=۶$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{x+۱}-\cancel{\frac{۱}{x+۲}}+\cancel{\frac{۱}{x+۲}}-\cancel{\frac{۱}{x+۴}}+\cancel{\frac{۱}{x+۴}}-\frac{۱}{x+۷}=۶$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x+۷}=۶ \Rightarrow \frac{۶}{x^۲+۸x+۷}=۶$$

$$\Rightarrow x^۲+۸x+۷=۱ \Rightarrow x^۲+۸x+۶=۰ \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = -۸$$

*(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)*

## ریاضی پایه هندسه

**۱- گزینهٔ «۱»** *(مانی موسوی)*

$$AB=\sqrt{(۴-۲)^۲+(۱-(-۳))^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

$$m_{AB}=\frac{۱-(-۳)}{۴-۲}=\frac{۴}{۲}=۲\Rightarrow AB: y-۱=۲(x-۴)$$

$$\Rightarrow y=۲x-۷\Rightarrow ۲x-y-۷=۰$$

$$\Rightarrow CH=\frac{|۲(۳)-(-۴)-۷|}{\sqrt{۲^۲+(۱)^۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۵}}$$

$$S=\frac{AB\times CH}{۲}=\frac{۲\sqrt{۵}\times ۳}{\sqrt{۵}\times ۲}=۳$$

*(هندسه تحلیلی و جبر)(ریاضی۲، صفحه‌های۲ تا ۱۰)*

---

**۲- گزینهٔ «۳»** *(سینا خیرخواه)*

ابتدا نقطهٔ برخورد دو خط را به دست می‌آوریم:

$$۱)\ x+۲y=۴$$

$$۲)\ y-۲x=۳\Rightarrow y=۳+۲x\xrightarrow{(۱)}x+۲(۳+۲x)=۴$$

$$\Rightarrow ۵x+۶=۴\Rightarrow x=\frac{-۲}{۵},y=\frac{۱۱}{۵}$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ به دست آمده از نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را به دست می‌آوریم:

$$A(-\frac{۲}{۵},\frac{۱۱}{۵}),\ y=x\Rightarrow x-y=۰$$

$$\Rightarrow d=\frac{|-\frac{۲}{۵}-\frac{۱۱}{۵}|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{\frac{۱۳}{۵}}{\sqrt{۲}}=\frac{۱۳}{۵\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۱۳\sqrt{۲}}{۱۰}$$

*(هندسه تحلیلی و جبر)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)*

---

**۳- گزینهٔ «۲»** *(مهرداد مهریان)*

با توجه به فاصلهٔ نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ از خط عبارت $ax+by+c=۰$ داریم:

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\xrightarrow[(۳,k)]{۳x-۴y+۶=۰}\Rightarrow\frac{|۹-۴k+۶|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{|-۴k+۱۵|}{۵}=۱$$

$$|-۴k+۱۵|=۵\Rightarrow -۴k+۱۵=\pm۵\Rightarrow\begin{cases}-۴k+۱۵=۵\Rightarrow -۴k=-۱۰,\ k=\frac{۱۰}{۴}\\ -۴k+۱۵=-۵\Rightarrow -۴k=-۲۰,k=۵\end{cases}$$

مجموع مقادیر ممکن برای $k$:

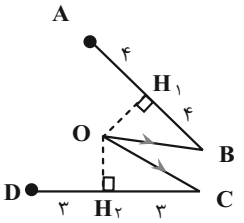
$$\frac{۵}{۲}+۵=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵$$

*(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)*

---

**۴- گزینهٔ «۲»** *(سینا خیرخواه)*

طبق سوال وقتی نقطهٔ $O$ از نقاط $A,B,C$ و $D$ به یک فاصله است، پس روی محل تلاقی عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های $AB$ و $CD$ قرار دارد. در نتیجه خواهیم داشت:




$$\overset{\Delta}{OBH_۱}: OH_۱^۲=۵^۲-۴^۲=۹\Rightarrow OH_۱=۳$$

$$\overset{\Delta}{OCH_۲}: OH_۲^۲=۵^۲-۳^۲=۱۶\Rightarrow OH_۲=۴$$

$$\Rightarrow OH_۱+OH_۲=۷$$

*(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)*

---

**۵- گزینهٔ «۳»** *(امیررضا شجاعیان)*

نکته: وقتی سه نقطه بر یک راستا قرار دارند یعنی شیب خط گذرنده از هر دو نقطه باید با هم برابر باشد.




$$m_{AB}=\frac{۳}{a-۴}\quad,\quad m_{AC}=\frac{a-۲}{۵}$$

$$\Rightarrow m_{AB}=m_{AC}\Rightarrow\frac{۳}{a-۴}=\frac{a-۲}{۵}\Rightarrow ۱۵=a^۲-۶a+۸$$

$$\Rightarrow a^۲-۶a-۷=۰\Rightarrow \text{مجموع مقادیر } a=\frac{-(-۶)}{۱}=۶$$

*(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)*

---

**۶- گزینهٔ «۲»** *(علیرضا عباسی‌زاهد)*

دو ضلع مجاور یک مستطیل بر هم عمودند.

$$\left.\begin{array}{l}۳x+y=۵\Rightarrow m_۱=-۳\\ ax+۳y=۹\Rightarrow m_۲=-\frac{a}{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow m_۱.m_۲=-۱=a\rightarrow a=-۱$$

از آنجا که مختصات نقطهٔ $A$ در هیچ‌یک از این دو معادله صدق نمی‌کند، فاصلهٔ نقطهٔ $A$ از هر خط برابر اندازهٔ طول و عرض مستطیل است:

$$۳x+y-۵=۰\Rightarrow d=\frac{|۳(۲)+۱-۵|}{\sqrt{۳^۲+۱^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}$$

$$-x+۳y-۹=۰\Rightarrow d'=\frac{|-۲+۳-۹|}{\sqrt{(-۱)^۲+۳^۲}}=\frac{۸}{\sqrt{۱۰}}$$

مساحت مستطیل برابر $\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}\times\frac{۸}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۱۶}{۱۰}$ است.

*(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)*

**۷- گزینهٔ «۴»** *(شیوا امین)*

نقطهٔ وسط پاره خط $CD$ برابر است با:

$$(\frac{۶-۲m}{۲},\frac{m+۲}{۲})$$

حال این نقطه را در معادلهٔ داده شده قرار می‌دهیم:

$$\frac{m+۲}{۲}=۴(\frac{۶-۲m}{۲})+۴\Rightarrow\frac{m+۲}{۲}=۱۲-۴m+۴$$

$$\Rightarrow m+۲=۲۴-۸m+۸\Rightarrow ۹m=۳۰\Rightarrow m=\frac{۳۰}{۹}=\frac{۱۰}{۳}$$

*(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)*

---

**۸- گزینهٔ «۱»** *(امیررضا شجاعیان)*

نکته: فاصلهٔ نقاط روی نیمساز دو خط متقاطع از دو خط به یک اندازه است.

فرض کنید نقطه $A(x_۰,y_۰)$ روی نیمساز قرار دارد. پس با توجه به نکته بالا داریم:

$$\frac{|۱۲x_۰+۵y_۰-۹|}{\sqrt{(۱۲)^۲+(۵)^۲}}=\frac{|۳x_۰-۴y_۰-۴|}{\sqrt{(۳)^۲+(-۴)^۲}}\Rightarrow\frac{|۱۲x_۰+۵y_۰-۹|}{۱۳}=\frac{|۳x_۰-۴y_۰-۴|}{۵}$$

حالت اول: $\frac{۱۲x_۰+۵y_۰-۹}{۱۳}=\frac{-۳x_۰+۴y_۰+۴}{۵}$

$$\Rightarrow ۹۹x_۰-۲۷y_۰-۹۷=۰\Rightarrow \text{عرض از مبدأ}=\frac{-۹۷}{۲۷}$$

حالت دوم: $\frac{۱۲x_۰+۵y_۰-۹}{۱۳}=\frac{۳x_۰-۴y_۰-۴}{۵}$

$$\Rightarrow ۲۱x_۰+۷۷y_۰+۷=۰\Rightarrow \text{عرض از مبدأ}=\frac{-۷}{۷۷}=\frac{-۱}{۱۱}$$

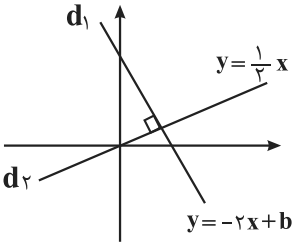
که از بین این دو عدد، $\frac{-۱}{۱۱}$ در گزینه‌ها است.

*(ترکیبی)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰ و ۲۶ تا ۳۰)*

---

**۹- گزینهٔ «۲»** *(عرفان اصغری‌فاروجی)*

معادلهٔ خط $d_۱$ را با توجه به مجهول بودن عرض از مبدأ آن بصورت $y=-۲x+b$ در نظر می‌گیریم. از آن جایی که خط $d_۲$ از مبدأ گذشته و بر $d_۱$ عمود است معادلهٔ آن بصورت $y=\frac{۱}{۲}x$ خواهد بود. داریم:

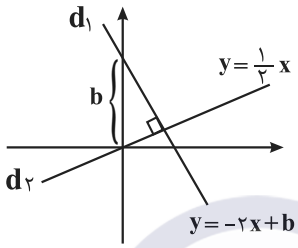



حال نقطهٔ تلاقی این دو خط را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۲}x=-۲x+b$$

$$\rightarrow x_{\text{برخورد}}=\frac{۲b}{۵}\ ,\ y_{\text{برخورد}}=\frac{۱}{۲}x_{\text{برخورد}}=\frac{b}{۵}$$

برای به‌دست آوردن مساحت ناحیهٔ محصور، عرض از مبدأ خط $d_۱$ را به‌دست می‌آوریم. ارتفاع وارد بر این قاعده نیز برابر $x_{\text{برخورد}}$ است.




$$S=\frac{۱}{۲}\times(\frac{۲b}{۵})(b)=۲۰$$

$$S=\frac{b^۲}{۵}=۲۰$$

$$\rightarrow b=۱۰$$

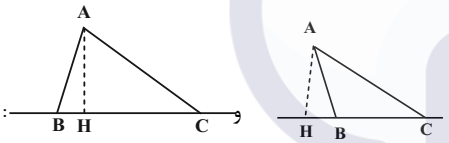
$$x_{\text{برخورد}}+y_{\text{برخورد}}=\frac{۲b}{۵}+\frac{b}{۵}=\frac{۳b}{۵}=۶$$

*(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)*

---

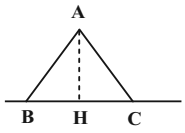
**۱۰- گزینهٔ «۳»** *(مانی موسوی)*

حالت اول: $b>c$ یا $c>b$




و $\Rightarrow$ دو مثلث

حالت دوم: $b=c$




$\Rightarrow$ یک مثلث

حالت سوم: $b\ ,\ c\le h$

هیچ مثلثی قابل فرض نیست

بنابراین، بسته به اندازهٔ اضلاع $b$ و $c$، ممکن است صفر، یک یا دو مثلث قابل فرض باشند.

*(هندسه)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)*

**۱– گزینهٔ «۳»** *(محمد زنگنه)*

با توجه به نمودار، نقطهٔ $A$، نقطهٔ سمت چپ (کوچک‌تر) برخورد نمودار تابع با محور $x$ها است:

$$۲x^۲+۵x-۳=۰ \Rightarrow x=\frac{-۵\pm\sqrt{۲۵+۲۴}}{۴}$$

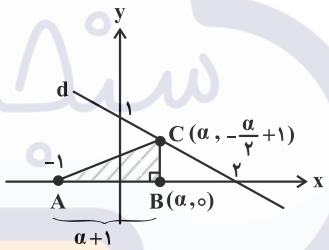
$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-۵-۷}{۴}=-۳ & \checkmark \\ x=\frac{-۵+۷}{۴}=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

*(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)*

---

**۲– گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا راسخ)*

ابتدا معادلهٔ خط $d$ را به کمک نقاط $(۲,۰)$ و $(۰,۱)$ می نویسیم:




$$d: y-۱=\frac{۱-۰}{۰-۲}(x-۰) \Rightarrow d: y=-\frac{۱}{۲}x+۱$$

اگر فرض کنیم مختصات رأس $B$ به صورت $(\alpha,۰)$ باشد، آن‌گاه چون $B$ و $C$ در یک راستا قرار دارند و $C$ روی خط $d$ واقع است، پس مختصات رأس $C$ به صورت $(\alpha\ ,\ -\frac{\alpha}{۲}+۱)$ می‌باشد و مساحت مثلث $ABC$ از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{(\alpha+۱)(-\frac{\alpha}{۲}+۱)}{۲}=-\frac{\alpha^۲}{۴}+\frac{\alpha}{۴}+\frac{۱}{۲}$$

چون مساحت مثلث نسبت به $\alpha$ یک تابع درجه دوم است، برای محاسبه بیشترین مقدار مساحت مثلث $ABC$ داریم:

$$\alpha_S=-\frac{\frac{۱}{۴}}{۲(-\frac{۱}{۴})}=\frac{۱}{۲}$$

$$\max(S_{\overset{\Delta}{ABC}})=-\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۲}=\frac{-۱+۲+۸}{۱۶}=\frac{۹}{۱۶}$$

*(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی۲، صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)*

---

**۳– گزینهٔ «۲»** *(نیما مهندس)*

با توجه به این که $(g-f)(x)$ یک تابع خطی است، بنابراین ضریب $x^۲$ در ضابطهٔ سهمی‌های $f$ و $g$ یکسان است.

$$\left.\begin{matrix} f(x)=a(x-۳)^۲-۸ \\ g(x)=a(x+۳)(x-۱)-k \end{matrix}\right\} \xrightarrow{g(۰)-f(۰)=۱}$$

$$(-۳a-k)-(۹a-۸)=۱ \Rightarrow -۱۲a-k=-۷$$

$$\Rightarrow k=۷-۱۲a \qquad (*)$$

همچنین از نمودار $g-f$ داریم:

$$g(-\frac{۱}{۴})=f(-\frac{۱}{۴}) \Rightarrow a(\frac{۱۱}{۴})(-\frac{۵}{۴})-k=\frac{۱۶۹}{۱۶}a-۸$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{-۵۵}{۱۶}a+۱۲a-۷=\frac{۱۶۹}{۱۶}a-۸ \Rightarrow ۲a=۱$$

$$\Rightarrow a=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{k=۷-۱۲a} k=۱$$

بنابراین ضابطهٔ تابع درجهٔ دوم $g(x)$ به صورت زیر است:

$$g(x)=\frac{۱}{۲}(x+۳)(x-۱)-۱=\frac{۱}{۲}x^۲+x-\frac{۵}{۲}$$

صفرهای سهمی $g$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$g(x)=۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x^۲+x-\frac{۵}{۲}=۰ \Rightarrow \alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳PS$$

$$=(-۲)^۳-۳(-۵)(-۲)=-۸-۳۰=-۳۸$$

*(ترکیبی)(ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲) (ریاضی۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)*

---

**۴– گزینهٔ «۳»** *(شاهین پروازی)*

محل برخورد $f(x)$ با $y=x$، نقاطی به طول ۲ و ۴ است؛ یعنی $x=۲$ و $x=۴$، ریشه‌های معادلهٔ $f(x)-x=۰$ هستند:

$$f(x)-x=a(x-۲)(x-۴)$$

$$\Rightarrow f(x)=a(x-۲)(x-۴)+x \quad (*)$$

نمودار $f(x)$ بر خط $y=x-۶$ مماس است؛ یعنی معادلهٔ $f(x)-x+۶=۰$ ریشهٔ مضاعف دارد:

$$f(x)-x+۶=۰ \xrightarrow{(*)} a(x-۲)(x-۴)+۶=۰$$

$$\Rightarrow ax^۲-۶ax+۸a+۶=۰$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} \Delta=۳۶a^۲-۴a(۸a+۶)=۰$$

$$\Rightarrow ۴a^۲-۲۴a=۰ \Rightarrow ۴a(a-۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۰ & \times \\ a=۶ & \checkmark \end{cases}$$

داریم:

$$\begin{cases} f(3) = 6(3-2)(3-4)+3 = 6(1)(-1)+3 = -3 \\ f(5) = 6(5-2)(5-4)+5 = 6(3)(1)+5 = 23 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} f(3)+f(5) = 20$$

*(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۰ تا ۸۲)*

---

**۵- گزینهٔ «۳»** *(حمید علیزاده)*

با توجه به فرض داریم:

$$x^2 - mx + 64 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = m \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = 64 \end{cases}$$

همچنین:

$$x_1, x_2^3, x_1^2 \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} (x_2^3)^2 = x_1 . x_1^2 \Rightarrow x_2^6 = x_1^3$$

$$\Rightarrow x_2^2 = x_1 \xrightarrow{\times x_2} x_2^3 = \underbrace{x_1 x_2}_{P} \Rightarrow x_2^3 = 64 \Rightarrow x_2 = 4$$

$$x_2 = 4 \Rightarrow x_1 = 16 \Rightarrow S = x_1 + x_2 = 20 = m$$

*(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ و ۱۳)*

---

**۶- گزینهٔ «۲»** *(اخشین خاصه‌خان)*

در مورد سهمی اول داریم:

$$y = x^2 - 4x + 7 \Rightarrow \text{رأس سهمی}: (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = (2, 3)$$

قرینهٔ این نقطه نسبت به خط $y = 2$ برابر است با $(1, 2)$ و همچنین دهانهٔ سهمی دوم رو به پایین بوده و ضریب $x^2$ در آن برابر $a = -1$ می‌باشد. پس معادلهٔ سهمی دوم به صورت زیر می‌شود:

$$y = -(x-2)^2 + 1 \Rightarrow a = -1, b = 2, c = 1 \Rightarrow a+b+c = 2$$

*(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)*

---

**۷- گزینهٔ «۱»** *(داود یوالفسنی)*

جمع و ضرب ریشه‌های معادله برابر است با:

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -\dfrac{-3\alpha}{2\beta-1} = \dfrac{3\alpha}{2\beta-1} \quad (*) \\ \alpha\beta = \dfrac{\alpha}{(2\beta-1)} \xrightarrow{\alpha \neq 0} \beta = \dfrac{1}{2\beta-1} \Rightarrow 2\beta^2 - \beta - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 1 \xrightarrow{(*)} \alpha + 1 = \dfrac{3\alpha}{1} \Rightarrow 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{2} \\ \beta = -\dfrac{1}{2} \xrightarrow{(*)} \alpha - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3\alpha}{-2} \Rightarrow -2\alpha + 1 = 3\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta = \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad -\frac{1}{10}$$

پس کمترین مقدار $\alpha\beta$ برابر $-\frac{1}{10}$ است.

*(هندسه تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲،صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)*

---

**۸- گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا کشاورزی)*

طبق فرض، ضابطهٔ سهمی را به صورت زیر می‌یابیم:

$$y = a(x+1)(x-2) \xrightarrow{(0,2)} 2 = -2a \Rightarrow a = -1$$

$$y = -(x+1)(x-2)$$

$$\xrightarrow{x=-2} y = -4 \Rightarrow (-2, -4) \quad \text{درست}$$

$$\xrightarrow{x=-4} y = -18 \Rightarrow (-4, -18) \quad \text{نادرست}$$

$$\xrightarrow{x=3} y = -4 \Rightarrow (3, -4) \quad \text{نادرست}$$

$$\xrightarrow{x=1} y = 2 \Rightarrow (1, 2) \quad \text{نادرست}$$

*(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)*

---

**۹- گزینهٔ «۲»** *(علی آزاد)*

با توجه به این‌که یکی از نقاط برخورد دو منحنی بر روی محور $y$ها است، خواهیم داشت:

$$y = 4x - b \xrightarrow{x=0} y = -b$$

بنابراین نقطهٔ $(0, -b)$ بر روی سهمی نیز قرار دارد:

$$y = -x^2 + bx + c \xrightarrow{(0,-b)} -b = 0 + 0 + c \Rightarrow c = -b$$

$$\Rightarrow y = -x^2 + bx - b \Rightarrow \text{طول رأس سهمی}: x = \frac{-b}{-2} = \frac{b}{2}$$

عرض رأس سهمی: $y = -(\frac{b}{2})^2 + b(\frac{b}{2}) - b$

$$= -\frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{2} - b = \frac{b^2}{4} - b = 3 \Rightarrow b^2 - 4b - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (b-6)(b+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 6 \Rightarrow \text{رأس } x = 3 \text{ ق ق غ} \\ b = -2 \Rightarrow \text{رأس } x = -1 \text{ ق ق} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} b = -۲ \\ c = ۲ \end{cases} \Rightarrow bc = -۴$$

*(معادله‌ها و نامعادله‌ها) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)*

---

**۱۰- گزینهٔ «۴»** *(علی سلامت)*

اگر $\alpha$ و $\beta$ جواب‌های این معادله باشند آن‌گاه طبق فرض:

$$(m-۱)x^۲ - (m+۱)x + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{m+۱}{m-۱} \\ \alpha\beta = \dfrac{۱}{m-۱} \end{cases}$$

$$\alpha^۲ + \beta^۲ + ۱ = \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} \Rightarrow (\alpha+\beta)^۲ - ۲\alpha\beta + ۱ = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m+۱}{m-۱}\right)^۲ - \frac{۲}{m-۱} + ۱ = m + ۱ \xrightarrow{\times (m-۱)^۲}$$

$$m^۲ + ۲m + ۱ - ۲m + ۲ + m^۲ - ۲m + ۱ = (m+۱)(m^۲ - ۲m + ۱)$$

$$\Rightarrow ۲m^۲ - ۲m + ۴ = m^۳ - ۲m^۲ + m + m^۲ - ۲m + ۱$$

$$\Rightarrow m^۳ - ۳m^۲ + m - ۳ = ۰ \Rightarrow m^۲(m-۳) + m - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow (m-۳)(m^۲ + ۱) = ۰ \Rightarrow m = ۳$$

در نتیجه حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر است با:

$$\alpha\beta = \frac{۱}{m-۱} = \frac{۱}{۲}$$

*(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)*

ریاضی پایه – هندسه

**۱– گزینهٔ «۲»** (سعید مروّجی)

$$\frac{a}{۲}=\frac{b}{۳}=\frac{c}{۵}=k\Rightarrow a=۲k,b=۳k,c=۵k$$
$$\frac{۳a-۲b+c}{۲a+۲b-c}=\frac{۳(۲k)-۲(۳k)+۵k}{۲(۲k)+۲(۳k)-۵k}=\frac{۵k}{۵k}=۱$$

(هندسه)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

---

**۲– گزینهٔ «۳»** (پیمان طیار)

$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۴۹}{۱۲۸}=(\frac{a_۱}{a_۲})^۲\Rightarrow\frac{a_۱}{a_۲}=\frac{۷}{۸\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{۲۱}{a_۲}=\frac{۷}{۸\sqrt{۲}}\Rightarrow a_۲=۲۴\sqrt{۲}$$

(هندسه)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲تا ۴۶)

---

**۳– گزینهٔ «۲»** (حمید علیزاده)

$$EF\parallel MN\Rightarrow\frac{EF}{MN}=\frac{AE}{AM}\Rightarrow\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳}=\frac{AE}{AM}$$
$$MN\parallel BC\Rightarrow\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}\Rightarrow\frac{۳x}{۶x}=\frac{۱}{۲}=\frac{AM}{AB}$$
$$\frac{AE}{AM}+\frac{AM}{AB}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۶}$$

(هندسه)(ریاضی ۲، صفحه‌های۳۴ تا ۳۷)

---

**۴– گزینهٔ «۲»** (محمد حمیدی)

$$\left.\begin{matrix}\hat{B}=\hat{B}\\ \hat{C}=\hat{D}_۱\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{BDE}\Rightarrow\overset{\Delta}{ACB}\sim\overset{\Delta}{EDB}$$
$$\Rightarrow\frac{۲۴}{۴۸}=\frac{y}{۲۴}=\frac{۱۸}{۲۴+x}\Rightarrow\begin{cases}x=۱۲\\ y=۱۲\end{cases}\Rightarrow x-y=۰$$

(هندسه)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

---

**۵– گزینهٔ «۳»** (محمد حمیدی)

$$AC\parallel BD\Rightarrow\begin{cases}\hat{A}=\hat{B}\\ \hat{C}=\hat{D}\end{cases}\Rightarrow\overset{\Delta}{ACE}\sim\overset{\Delta}{BDE}\Rightarrow\frac{AE}{EB}=\frac{CH'}{DH}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

نسبت ارتفاع‌های دو مثلث متشابه با نسبت تشابه برابر است.

$$\Rightarrow\frac{AE+EB}{EB}=\frac{۳+۴}{۴}\Rightarrow\frac{AB}{EB}=\frac{۷}{۴}\Rightarrow EB=\frac{۴}{۷}AB=۲۰$$
$$S_{\overset{\Delta}{BDE}}=\frac{۱}{۲}DH\times BE=\frac{۱}{۲}\times۸\times۲۰=۸۰$$

(هندسه)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

---

**۶– گزینهٔ «۳»** (فرهاد سرابی کلیبر)

با توجه به موازی بودن خطوط و همچنین زاویهٔ برابر رأس $\hat{A}$، مثلث‌ها با هم متشابه‌اند و نسبت مساحت آن‌ها برابر با مجذور ضریب تشابه آنها است.

$$\frac{AD}{DB}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۴}{۲۵}$$

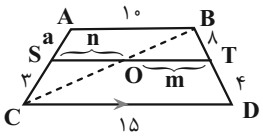
$$\frac{AP}{PB}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{AP}{AB}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{APQ}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۹}{۲۵}$$

$$S_{DPQE}=S_{\overset{\Delta}{APQ}}-S_{\overset{\Delta}{ADE}}=\frac{۹}{۲۵}S_{\overset{\Delta}{ABC}}-\frac{۴}{۲۵}S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۵}{۲۵}S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$
$$\frac{S_{DPQE}}{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}=\frac{\frac{۵}{۲۵}S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{\frac{۴}{۲۵}S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۵}{۴}$$

(هندسه)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷ و ۴۲ تا ۴۶)

---

**۷– گزینهٔ «۴»** (پیمان طیّار)




قطر BC را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد قطر BC با خط ST را O می‌نامیم.

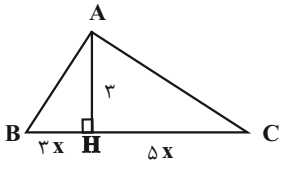
$$CD\parallel AB\parallel ST\xrightarrow[\frac{AS}{SC}=\frac{BT}{TD}]{}\frac{a}{۳}=\frac{۸}{۴}\Rightarrow a=۶\quad(۱)$$
$$\overset{\Delta}{ABC}:OS\parallel AB\xrightarrow[\frac{CS}{CA}=\frac{OS}{AB}]{}\frac{۳}{a+۳}=\frac{n}{۱۰}\xrightarrow{(۱)}\frac{۳}{۹}=\frac{n}{۱۰}\Rightarrow n=\frac{۱۰}{۳}$$
$$\overset{\Delta}{BCD}:OT\parallel CD\Rightarrow\frac{۸}{۱۲}=\frac{m}{۱۵}\Rightarrow m=۱۰$$
$$b=n+m\Rightarrow\frac{۱۰}{۳}+۱۰=\frac{۴۰}{۳}$$
$$a+b=۶+\frac{۴۰}{۳}=\frac{۵۸}{۳}\simeq۱۹/۳۳$$

(هندسه)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

---

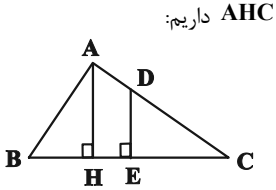
**۸– گزینهٔ «۳»** (مانی موسوی)

مطابق شکل زیر، مثلث‌های AHB و AHC دارای ارتفاع یکسانی هستند؛ بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت قاعده‌های آن‌ها است. خواهیم داشت:




$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AHC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHB}}}=\frac{HC}{HB}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{AHC}}}{\underbrace{S_{\overset{\Delta}{AHC}}+S_{\overset{\Delta}{AHB}}}_{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}}=\frac{۵}{۵+۳}=\frac{۵}{۸}$$
$$\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{AHC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{AHC}}=\frac{۵}{۸}S_{\overset{\Delta}{ABC}}\quad(۱)$$

حال طبق خواستهٔ سوال، پاره خط DE را موازی با AH رسم می‌کنیم. در آن صورت، به دلیل متشابه بودن دو مثلث DEC و AHC داریم:




$$\frac{S_{\overset{\Delta}{DEC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHC}}}=\frac{DE^۲}{AH^۲}\quad(۲)$$

$$S_{\overset{\Delta}{DEC}} = \frac{1}{2} S_{\overset{\Delta}{ABC}} \xrightarrow{(2),(1)} \frac{\frac{1}{2} S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{\frac{5}{8} S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{DE^2}{AH^2} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{DE^2}{3^2}$$

$$\Rightarrow DE = \sqrt{\frac{3 \times 3 \times 4}{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

---

**۹- گزینهٔ «۴»** (پیمان طیار)

در مثلث $\overset{\Delta}{ACE}$ با توجه به قضیهٔ تالس داریم:

$$BD \parallel EC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$$

$$\Rightarrow \frac{5-x}{5} = \frac{BD}{3} \Rightarrow BD = \frac{3}{5}(5-x) \quad (1)$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ADC$ داریم:

$$BD^2 = BC \times AB \Rightarrow BD^2 = x(5-x) \quad (2)$$

با قرار دادن رابطه (۱) در (۲) داریم:

$$\left(\frac{3}{5}(5-x)\right)^2 = x(5-x) \Rightarrow$$

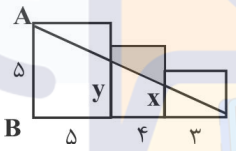
$$\Rightarrow \frac{9}{25}(5-x)^2 = x(5-x) \Rightarrow \frac{9}{25}(5-x) = x \Rightarrow 25x = 45 - 9x$$

$$34x = 45 \Rightarrow x = \frac{45}{34} \simeq 1/32$$

(هندسه)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷ و ۴۲ تا ۴۶)

---

**۱۰- گزینهٔ «۱»** (محمد حمیدی)




$$y \parallel AB \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{y}{5} = \frac{7}{12} \Rightarrow y = \frac{35}{12}$$

$$x \parallel AB \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{x}{5} = \frac{3}{12} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

ابتدا مساحت قسمت هاشور نخورده مربع دوم را محاسبه می کنیم:

$$S = \frac{1}{2} \times 4(x+y) = 2\left(\frac{35}{12} + \frac{5}{4}\right) = \frac{25}{3}$$

پس مساحت قسمت هاشور خورده برابر است با:

$$\text{مساحت هاشور خورده} = 16 - \frac{25}{3} = \frac{23}{3}$$

(هندسه)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

**۱- گزینهٔ «۲»** *(رضا بحفری)*

می‌دانیم اگر $a$ ریشهٔ $n$ اُم $b$ باشد، آن‌گاه: $b = a^n$

بنابراین: $۷۲۹ = a^۶ \xrightarrow{a<۰} a = -\sqrt[۶]{۷۲۹} = -۳$

*(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۵۴ تا ۵۸)*

---

**۲- گزینهٔ «۱»** *(جهانبخش نیکنام)*

ابتدا $a = -\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}$ را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$a = -\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}} = -\sqrt{(۲-\sqrt{۳})^۲} = -|۲-\sqrt{۳}| = \sqrt{۳}-۲$$

اکنون داریم:

$$a - ۵a^{-۱} + ۲ = \sqrt{۳} - ۲ - \frac{۵}{\sqrt{۳}-۲} + ۲$$

$$= \sqrt{۳} + \frac{۵}{۲-\sqrt{۳}} \times \frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} = \sqrt{۳} + ۵(\sqrt{۳}+۲) = ۱۰ + ۶\sqrt{۳}$$

و در نهایت ریشهٔ سوم $۱۰+۶\sqrt{۳}$ را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt[۳]{۱۰+۶\sqrt{۳}} = \sqrt[۳]{(\sqrt{۳}+۱)^۳} = \sqrt{۳}+۱$$

*(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۵۴ تا ۵۸ و ۶۳ تا ۶۷)*

---

**۳- گزینهٔ «۲»** *(سیدرضا اسلامی)*

اگر فرض کنیم پس از هر ۲۰ دقیقه، جرم باکتری‌ها $b$ برابر می‌شود، پس از دو ساعت (۱۲۰ دقیقه) جرم باکتری‌ها $b^۶$ برابر خواهد شد. بنابراین:

$$b^۶ = ۲ \Rightarrow b = \sqrt[۶]{۲}$$

از طرفی با توجه به این‌که ۲۶۰ دقیقه معادل ۱۳ تا ۲۰ دقیقه است، جرم باکتری‌ها پس از ۲۶۰ دقیقه $b^{۱۳}$ برابر می‌شود. بنابراین:

$$b^{۱۳} = (\sqrt[۶]{۲})^{۱۳} = ۲^{\frac{۱۳}{۶}} = ۲^۲ \times ۲^{\frac{۱}{۶}} = ۴\sqrt[۶]{۲}$$

روش ۲:

$$\left.\begin{array}{l} \text{دقیقه}۲۶۰ = ۴\times۶۰ + ۲۰ \text{ دقیقه} \\ ۲\times۱۲۰ + \frac{\frac{۱}{۳}\times ۱\text{ ساعت}}{۲\text{ ساعت}} = ۲\frac{۱}{۶} \\ A \xrightarrow[\text{۱بار}]{} ۲A \xrightarrow[\text{۲بار}]{} ۴A \end{array}\right\} \Rightarrow (۴\times\sqrt[۶]{۲})A = ۴\sqrt[۶]{۲}A$$

$$\frac{۴\sqrt[۶]{۲}A}{A} = ۴\sqrt[۶]{۲}$$

*(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)*

---

**۴- گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

با توجه به اتحاد $(a+b)(a^۲-ab+b^۲) = a^۳+b^۳$، داریم:

$$(\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{۲-x})(\sqrt[۳]{x^۲} - \sqrt[۳]{۲x-x^۲} + \sqrt[۳]{x^۲-۴x+۴})$$

$$= x + (۲-x) = ۲ \xrightarrow{\sqrt{x}+\sqrt{۲-x}=۱}$$

$$\sqrt[۳]{x^۲} - \sqrt[۳]{۲x-x^۲} + \sqrt[۳]{x^۲-۴x+۴} = ۲$$

*(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)*

---

**۵- گزینهٔ «۲»** *(مهسان کوهرزی)*

$$۰ < x < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{x} > x \Rightarrow x - \frac{۱}{x} < ۰ \qquad (۱)$$

با توجه به اتحاد $(a-b)^۲ = a^۲+b^۲-۲ab$ داریم:

$$(x-\frac{۱}{x})^۲ = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} - ۲ = ۱۸ - ۲ = ۱۶ \xrightarrow{(۱)} x - \frac{۱}{x} = -۴$$

حال با استفاده از اتحاد $a^۳-b^۳ = (a-b)(a^۲+ab+b^۲)$ داریم:

$$x^۳ - \frac{۱}{x^۳} = (x-\frac{۱}{x})(x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۱)$$

$$= (-۴)(۱۸+۱) = -۴\times۱۹ = -۷۶$$

*(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)*

---

**۶- گزینهٔ «۳»** *(میلاد منصوری)*

با فرض $a = \sqrt{۶}+\sqrt{۲}$ و $b = ۲-\sqrt{۳}$ داریم:

$$a = \sqrt{۲}(\sqrt{۳}+۱)$$

$$b = ۲-\sqrt{۳} \Rightarrow ۲b = ۴-۲\sqrt{۳} = (\sqrt{۳}-۱)^۲ \Rightarrow b = \frac{(\sqrt{۳}-۱)^۲}{۲}$$

بنابراین داریم:

$$a^۳b^۲ = \frac{۲\sqrt{۲}(\sqrt{۳}+۱)^۳(\sqrt{۳}-۱)^۴}{۴}$$

$$= \frac{\sqrt{۲}\left((\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۳}-۱)\right)^۳(\sqrt{۳}-۱)}{۲} = \frac{\sqrt{۲}(۲^۳)(\sqrt{۳}-۱)}{۲}$$

$$= \frac{۸\sqrt{۲}(\sqrt{۳}-۱)}{۲} = ۴\sqrt{۲}(\sqrt{۳}-۱) = ۴(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$$

*(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)*

---

**۷- گزینهٔ «۲»** *(سینا خیرخواه)*

بعد از تجزیهٔ پرانتز وسط، از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$$M = \underbrace{(۱۶x^۲-۴x+۱)(۴x+۱)}_{(۴x)^۳+(۱)^۳}\underbrace{(۴x-۱)(۱۶x^۲+۴x+۱)}_{(۴x)^۳-(۱)^۳} + ۱$$

$$= (۶۴x^۳+۱)(۶۴x^۳-۱) + ۱$$

$$M = (۶۴x^۳)^۲ - (۱)^۲ + ۱ = ۲^{۱۲}\times x^۶ = ۲^{۱۲}\times(\sqrt[۳]{\frac{-۱}{۴}})^۶$$

$$= ۲^{۱۲}\times(\frac{-۱}{۴})^۲ = ۲^{۱۲}\times\frac{۱}{۲^۴} = ۲^۸ = ۲۵۶$$

*(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)*

**۸- گزینهٔ «۲»** *(داود حسین‌پور)*

$$A=\underbrace{۵(\sqrt{۲}+۱)^{-۱}}_{B}+\underbrace{\frac{۷+۴\sqrt{۲}}{۳+۲\sqrt{۲}}}_{C}$$

$$B=\frac{۵}{\sqrt{۲}+۱}\times\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{۵\sqrt{۲}-۵}{۲-۱}=۵\sqrt{۲}-۵$$

$$C=\frac{۷+۴\sqrt{۲}}{۳+۲\sqrt{۲}}\times\frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۳-۲\sqrt{۲}}=\frac{۲۱-۱۴\sqrt{۲}+۱۲\sqrt{۲}-۱۶}{۹-۸}$$

$$=۵-۲\sqrt{۲}$$

$$A=B+C=۵\sqrt{۲}-۵+۵-۲\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}$$

$$\sqrt{۲}A=\sqrt{۲}\times۳\sqrt{۲}=۶$$

*(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)*

---

**۹- گزینهٔ «۱»** *(طاهر داردستانی)*

صورت و مخرج کسر را توسط اتحاد چاق و لاغر به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^۴+x^۲+۱}{x^۲+x+۱}=\frac{x^۴+x^۲+۱}{x^۲+x+۱}\times\frac{(x^۲-۱)}{(x-۱)}\times\frac{(x-۱)}{(x^۲-۱)}=\frac{x^۶-۱}{x^۳-۱}\times\frac{x-۱}{x^۲-۱}$$

$$=\frac{(x^۳-۱)(x^۳+۱)}{(x^۳-۱)}\times\frac{x-۱}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{x^۳+۱}{x+۱}$$

$$=\frac{(x+۱)(x^۲-x+۱)}{(x+۱)}=x^۲-x+۱=(x-۱)^۲+x$$

$$=(\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۲}+۱)=۳+\sqrt{۲}$$

*(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)*

---

**۱۰- گزینهٔ «۲»** *(جوانبخش نیکنام)*

عدد $A$ را به صورت زیر گویا می‌کنیم:

$$A=\frac{۶}{\sqrt[۳]{۹}(\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱)}\times\frac{\sqrt[۳]{۳}-۱}{\sqrt[۳]{۳}-۱}$$

$$\Rightarrow A=\frac{۶(\sqrt[۳]{۳}-۱)}{\sqrt[۳]{۹}(۳-۱)}=\sqrt[۳]{۳}(\sqrt[۳]{۳}-۱)=\sqrt[۳]{۹}-\sqrt[۳]{۳}$$

در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر به صورت زیر می‌شود:

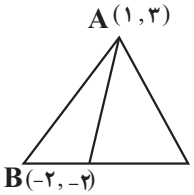
$$A^۳=۹-۳\underbrace{\sqrt[۳]{۹}\times\sqrt[۳]{۳}}_{۳}(\underbrace{\sqrt[۳]{۹}-\sqrt[۳]{۳}}_{A})-۳\Rightarrow A^۳+۹A=۶$$

*(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۷)*

## ریاضی پایه- هندسه ۱۱

**۱- گزینهٔ «۳»** (رضا پاپی)

میانه $AM$، ضلع $BC$ را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند در نتیجه نقطه $M$ وسط پاره خط $BC$ قرار گرفته است:




$$x_M = \frac{x_B + x_C}{۲} = \frac{-۲+(-۲)}{۲} = \frac{-۴}{۲} = -۲$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{۲} = \frac{-۲+۴}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

$$M(x_M, y_M) = (-۲,۱)$$

$$\overline{AM} = \sqrt{(x_A - x_M)^۲ + (y_A - y_M)^۲}$$

$$= \sqrt{(۱-(-۲))^۲ + (۳-۱)^۲} = \sqrt{۹+۴} = \sqrt{۱۳}$$

(هندسه تحلیلی)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲تا۱۰)

---

**۲- گزینهٔ «۳»** (شیوا امین)

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ ازهم برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲}$$

نقاط روی نیمساز ربع اول و سوم به صورت $M(\alpha,\alpha)$ قرار دارند:

$$|OM| = \sqrt{۱۷} \Rightarrow \sqrt{(\alpha-۳)^۲ + (\alpha-۰)^۲} = \sqrt{۱۷}$$

$$\alpha^۲ - ۶\alpha + ۹ + \alpha^۲ = ۱۷ \Rightarrow ۲\alpha^۲ - ۶\alpha - ۸ = ۰$$

طرفین را تقسیم بر ۲ می‌کنیم:

$$\alpha^۲ - ۳\alpha - ۴ = ۰ \Rightarrow \alpha = ۴ \text{ و } -۱$$

نقاط مورد نظر: $M_۱(-۱,-۱)$ و $M_۲(۴,۴)$ که قدرمطلق تفاضل طول‌های آن می‌شود:

$$|-۱-۴| = ۵$$

(هندسه تحلیلی)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۴تا۶)

---

**۳- گزینهٔ «۴»** (سینا همتی)

با توجه به ضرایب $x$ و $y$، این ۲ خط با هم موازی هستند، فاصلهٔ بین ۲ خط موازی را به دست می‌آوریم که می‌شود طول یا عرض مستطیل:

$$\begin{cases} -۲x + ۴y - ۷ = ۰ \\ -۲x + ۴y + ۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow d = \frac{|C - C'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

$$= \frac{|-۷-۳|}{\sqrt{(-۲)^۲ + (۴)^۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۲۰}} \Rightarrow d = \frac{۱۰}{۲\sqrt{۵}} \times \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow \sqrt{۵} \times b = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow b = ۲$$

بنابراین طول مستطیل $\sqrt{۵}$ و عرض آن برابر ۲ است. و محیط مستطیل نیز $۴ + ۲\sqrt{۵}$ است.

(هندسه تحلیلی)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲تا۴و۸و۹)

---

**۴- گزینهٔ «۴»** (سینا خیرخواه)

$$\text{دایره } S = ۳۶\pi \Rightarrow \pi r^۲ = ۳۶\pi \Rightarrow r = ۶$$

$$r = \frac{|۶(۳) + ۸(-۲) + k|}{\sqrt{۶^۲ + ۸^۲}} = ۶ \Rightarrow \frac{|۲ + k|}{۱۰} = ۶ \Rightarrow |۲ + k| = ۶۰$$

$$\begin{cases} ۲ + k = ۶۰ \Rightarrow k = ۵۸ \\ ۲ + k = -۶۰ \Rightarrow k = -۶۲ \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع} = -۴$$

(هندسه تحلیلی)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۸و۹)

---

**۵- گزینهٔ «۲»** (حامد قاسمیان)

$$\left.\begin{matrix} AB: -y + ۳x = ۴ \\ AC: y + x = -۱ \end{matrix}\right\} \rightarrow x = \frac{۳}{۴}, y = -\frac{۷}{۴} \Rightarrow A(\frac{۳}{۴}, -\frac{۷}{۴})$$

$$\text{ارتفاع AH از A فاصله} = BC = \frac{|\frac{۳}{۴} - \frac{۱۴}{۴} - \frac{۴}{۴}|}{\sqrt{۵}}$$

$$AH = \frac{۱۵}{۴\sqrt{۵}} = \frac{۳\sqrt{۵}}{۴}$$

(هندسه تحلیلی)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲تا۴و۸و۹)

---

**۶- گزینهٔ «۱»** (سینا خیرخواه)

$$\text{قطر} = ۲r = ۲(\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}) = ۳\sqrt{۵}$$

$$AB = \sqrt{(۲\alpha-۲)^۲ + (۱-\alpha)^۲} = \sqrt{۴(\alpha-۱)^۲ + (\alpha-۱)^۲} = \sqrt{۵(\alpha-۱)^۲} = ۳\sqrt{۵}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۵(\alpha-۱)^۲ = ۴۵ \Rightarrow (\alpha-۱)^۲ = ۹$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - ۱ = ۳ \Rightarrow \alpha = ۴ \Rightarrow A(۴,۲) B(۱,۸) \\ \alpha - ۱ = -۳ \Rightarrow \alpha = -۲ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\text{مرکز دایره } M(\frac{۴+۱}{۲}, \frac{۲+۸}{۲}) = M(\frac{۵}{۲}, ۵) \Rightarrow \frac{۵}{۲} + ۵ = \frac{۱۵}{۲}$$

(هندسه تحلیلی)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۴تا۱۰)

---

**۷- گزینهٔ «۳»** (سینا همتی)

اگر خط اول را $y_۱$ و خط دوم را $y_۲$ فرض کنیم. و چون ۲ نقطه از $y_۲$ را داریم پس شیب را حساب می‌کنیم.

$$\text{شیب خط } y_۲ = \frac{-۷-(-۳)}{۳-(-۵)} = \frac{-۴}{۸} = -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{y_۱ \text{ و } y_۲ \text{ برهم عمود هستند}} y_۱ = \frac{-۱}{y_۲} = +۲$$

با داشتن شیب خط $y_۱$ و یک نقطه از آن معادله آن را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix} (-۳,۸) \\ m = +۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow y - y_۰ = m(x - x_۰)$$

$$\Rightarrow y - ۸ = ۲(x+۳) \Rightarrow y = ۲x + ۱۴$$

$$\xrightarrow{A(۴,b)} b = ۴(۲) + ۱۴ = ۲۲$$

(هندسه تحلیلی)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲تا۴)

**۸- گزینهٔ «۲»** (محمدامین نبضی)

دو خط ذکر شده بایستی موازی با یکدیگر باشند و در عین حال انطباق نداشته باشند.

$$(I): ۲kx + ۸y = k - ۱ \Rightarrow ۸y = -۲kx + k - ۱$$

$$\Rightarrow y = -\frac{k}{۴}x + \frac{k-۱}{۸}$$

$$(II): (k-۱)y + ۵x = -k + ۷ \Rightarrow (k-۱)y = -۵x - k + ۷$$

$$\Rightarrow y = -\frac{۵}{k-۱}x + \frac{-k+۷}{k-۱}$$

برای برقراری درستی صورت سوال، بایستی دو شرط رو به رو برقرار باشند.

شرط اول : $-\frac{k}{۴} = -\frac{۵}{k-۱} \Rightarrow$ برابری شیب

شرط دوم : $\frac{k-۱}{۸} \neq \frac{-k+۷}{k-۱} \Rightarrow$ نابرابری عرض از مبدأ

حاصل جواب‌های معادلهٔ مربوط به برابری شیب‌ها را به دست آورده و شرط دوم را بررسی می‌کنیم.

$$\frac{-k}{۴} = -\frac{۵}{k-۱} \Rightarrow k^۲ - k = ۲۰ \Rightarrow k^۲ - k - ۲۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (k-۵)(k+۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} k = -۴ \\ k = +۵ \end{cases}$$

شرط دوم را بررسی می‌کنیم:

$$k = ۵ \text{ اگر } \Rightarrow \frac{۵-۱}{۸} = \frac{۱}{۲}, \frac{-۵+۷}{۵-۱} = \frac{۱}{۲}$$

$\Rightarrow$ انطباق $\Rightarrow$ عرض از مبدأها برابر ند

$$k = -۴ \text{ اگر } \Rightarrow \frac{-۴-۱}{۸} = -\frac{۵}{۸}, \frac{۴+۷}{-۴-۱} = -\frac{۱۱}{۵}$$

$\Rightarrow$ خطوط موازی $\Rightarrow$ نابرابری عرض از مبدأ

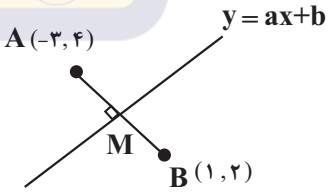
پس $k = -۴$ قابل قبول است. $\Rightarrow (k-۳, -k+۷) = (-۷, ۱۱) \Rightarrow$ **ناحیه دوم**

(هندسه تحلیلی)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۴)

---

**۹- گزینهٔ «۱»** (سهیل حسن‌خان‌پور)

خط $y = ax + b$ عمودمنصف $AB$ است. پس از نقطه وسط $AB$ می‌گذرد و بر آن عمود است.



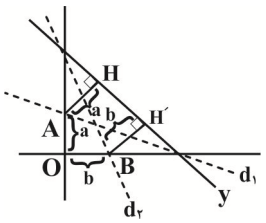

$$m_{AB} = \frac{۴-۲}{-۳-۱} = -\frac{۱}{۲} \quad x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{-۳+۱}{۲} = -۱, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۴+۲}{۲} = ۳ \Rightarrow M(-۱, ۳)$$

شیب خط $y = ax + b$ : $a = \frac{-۱}{m_{AB}} = \frac{-۱}{-\frac{۱}{۲}} = ۲$

$$\Rightarrow y - ۳ = ۲(x+۱) \Rightarrow y = ۲x + ۵ \Rightarrow \begin{matrix} a = ۲ \\ b = ۵ \end{matrix} \Rightarrow a^۲b = ۲^۲ \times ۵ = ۲۰$$

(هندسه تحلیلی)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

**۱۰- گزینهٔ «۲»** (فرشاد حسن‌زاده)




$A(۰, a)$

$B(b, ۰)$

می‌دانیم : $OA = OH$ ، بنابراین:

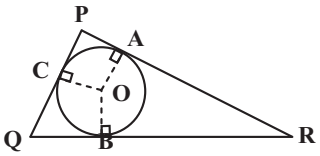
$$\frac{|۳a - ۱۶|}{۵} = a$$

$$\pm ۵a = |۳a - ۱۶| \rightarrow ۱۶ = ۳a \pm ۵ \xrightarrow{a>۰} a = ۲$$

**ریاضی پایه– هندسه ۱۱**

(سیار سامی‌مولان)

**۱– گزینهٔ «۲»**




شعاع دایره بر خط مماس در نقطه تماس عمود است. $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=۹۰^\circ$

$\hat{R}$ روی نیمساز $O \Leftarrow \overline{OA}=\overline{OB}$

$\hat{P}$ روی نیمساز $O \Leftarrow \overline{OA}=\overline{OC}$

$\hat{Q}$ روی نیمساز $O \Leftarrow \overline{OC}=\overline{OB}$

پس مرکز دایره روی محل برخورد نیمسازها واقع است.

(هندسه)(ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

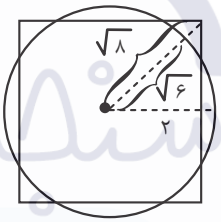
---

**۲– گزینهٔ «۳»**

(توحید اسدی)

مکان هندسی نقاطی که از مرکز مربع به فاصله $\sqrt{۶}$ هستند، دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۶}$ است که مرکز آن دقیقا منطبق بر مرکز مربع است. با توجه به آن که فاصله مرکز مربع تا اضلاع برابر ۲ است و شعاع دایره برابر $\sqrt{۶}$ و از نصف قطر مربع یعنی $\sqrt{۸}$ کمتر است بنابراین دایره موردنظر با مربع هشت نقطهٔ مشترک دارند.

نصف قطر مربع $=\sqrt{۲^۲+۲^۲}=\sqrt{۸}$ : فیثاغورس




(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

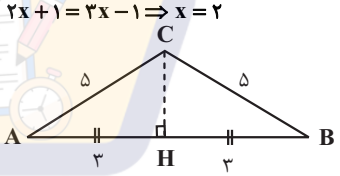
---

**۳– گزینهٔ «۳»**

(زانیار محمدی)

فاصلهٔ هر نقطه بر روی عمودمنصف از دو سر پاره خط یکسان است.

$$۲x+۱=۳x-۱ \Rightarrow x=۲$$




$$CH^۲=۲۵-۹=۱۶$$
$$CH=۴$$
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۴=۱۲$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه های ۲۶ تا ۳۰)

---

**۴– گزینهٔ «۱»**

(علی غلامپورسرابی)

نسبت محیط‌های مثلث‌ها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است.

$$\text{نسبت تشابه}=k=\frac{۹}{۱۵}=\frac{۳}{۵}$$

$$\text{نسبت مساحت‌ها}=k^۲=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow \frac{۹}{۲۵}=\frac{x}{۶۴}\Rightarrow x=\frac{۵۷۶}{۲۵}=۲۳\frac{۱}{۲۵}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحهٔ ۴۶)

---

**۵– گزینهٔ «۲»**

(افشین خاصه‌خان)

مطابق معلومات مسأله:

$$\frac{DE}{EA}=\frac{CF}{FB}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \frac{DE}{AD}=\frac{CF}{BC}\xrightarrow{AD=BC=۶}\frac{۱}{۵}\Rightarrow DE=CF=۱/۲$$

طبق تعمیم قضیه تالس:

$$\frac{DE}{AD}=\frac{EG}{AM}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow EG=\frac{۱}{۵}AM$$
$$\frac{CF}{BC}=\frac{HF}{MB}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow HF=\frac{۱}{۵}MB$$
$$\Rightarrow EG+HF=\frac{۱}{۵}(\underbrace{AM+MB}_{AB})=\frac{۱}{۵}\times ۶=۱/۲$$

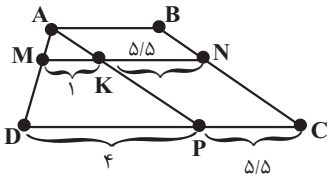
(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۳ تا ۴۱)

---

**۶– گزینهٔ «۲»**

(عباس الهی)

از رأس **A** به موازات ساق **BC** خطی رسم می‌کنیم تا قاعده **DC** را در نقطه **P** قطع کند. با کمی دقت متوجه می‌شویم که چهارضلعی **ABCP** متوازی الاضلاع است؛ پس:




$$KN=PC=AB=۵/۵$$

با نوشتن تالس در $\overset{\Delta}{ADP}$ داریم:

$$\frac{AM}{AD}=\frac{MK}{DP}=\frac{۱}{۴}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های۳۳ تا ۴۱)

---

**۷– گزینهٔ «۱»**

(وحید عبدالملکی)

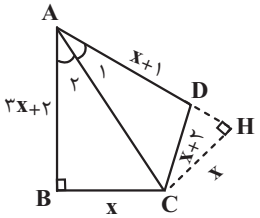
$$EH^۲=AE\times EC\Rightarrow EH^۲=۳\times ۱۲=۳۶\Rightarrow EH=۶$$
$$AH^۲=EH^۲+AE^۲\Rightarrow AH^۲=۳۶+۹\Rightarrow AH=\sqrt{۴۵}$$
$$x^۲=AH^۲+BH^۲\Rightarrow x^۲=۴۵+۴\Rightarrow x=۷$$
$$y^۲=EC^۲+EH^۲\Rightarrow y^۲=۱۴۴+۳۶\Rightarrow y=۶\sqrt{۵}\Rightarrow x+y=۷+۶\sqrt{۵}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

---

**۸– گزینهٔ «۲»**

(مسعود یکتا)




مطابق شکل مقابل ضلع **AD** را امتداد می‌دهیم و از **C** عمودی بر آن رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد را **H** می‌نامیم **C** روی نیمساز $\hat{A}$ واقع است؛ بنابراین $CH=x$. از طرفی $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{AHC}$ هم نهشت‌اند؛ بنابراین:

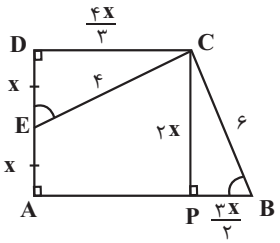
$$AH=AB=۳x+۲$$
$$AD=AH-HD\Rightarrow HD=۳x+۲-x-۱=۲x+۱$$

حال در مثلث $\overset{\Delta}{DCH}$ داریم:

$$(x+۲)^۲=x^۲+(۲x+۱)^۲$$
$$\Rightarrow x^۲+۴x+۴=x^۲+۴x^۲+۴x+۱$$
$$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰ و ۴۲ تا ۴۶)

**۹- گزینهٔ «۱»** *(فرشاد حسن‌زاده)*




دو مثلث **PBC** و **DEC** متشابه‌اند:

$$\frac{۴}{۶}=\frac{DC}{۲x}\Rightarrow DC=\frac{۴x}{۳}$$

فیثاغورس را در مثلث **DEC** می‌نویسیم.

$$\frac{۱۶x^۲}{۹}+x^۲=۱۶\Rightarrow x=\frac{۱۲}{۵}$$

$$S=(\frac{۳}{۲}x+\frac{۴}{۳}x+\frac{۴}{۳}x)\times\frac{\cancel{۲}x}{\cancel{۲}}=\frac{۲۵}{۶}x^۲=\frac{\cancel{۲۵}}{۶}\times\frac{۱۴۴}{\cancel{۲۵}}=۲۴$$

*(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)*

---

**۱۰- گزینهٔ «۲»** *(محمدحسن سلامی حسینی)*

**EF** را برابر با **x** در نظر می‌گیریم:

مثلث‌های **EDC** و **FDC** بنا به حالت دو زاویه با هم متشابه‌اند؛ پس:

$$\frac{DC}{EC}=\frac{FC}{DC}\Rightarrow\frac{DC}{۲+x}=\frac{۲}{DC}$$

$$DC^۲=۴+۲x$$

حال مثلث‌های **DEC** و **ABC** نیز متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{DC}{AD}=\frac{EC}{BE}\Rightarrow\frac{\sqrt{۴+۲x}}{۲}=\frac{۲+x}{۴}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{۲+x}=t}۴\sqrt{۲}t=۲t^۲\Rightarrow\begin{cases}t=۲\sqrt{۲}=\sqrt{۲+x}\Rightarrow ۲+x=۸\\ \Rightarrow x=۶\\ t=۰\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

*(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)*

**۱** اگر مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۴ < \frac{x+b}{۲x+۴} < ۱$ به صورت $(k,۱)$ باشد، حاصل $b+۷k$ کدام است؟

۱) $-۴$ ۲) $-۵$ ۳) $-۶$ ۴) $-۷$

---

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**Hint** برای حل این نامعادله، باید دو حالت رو در نظر بگیری: یکی وقتی که مخرج $(۲x+۴)$ مثبت می‌شه و یکی وقتی که منفیه. جهت نامساوی توی یکی از این حالت‌ها عوض می‌شه.

**پاسخ خیلی تشریحی ✔**

**گام اول:** با تعیین علامت مخرج کسر نامعادله را در دو حالت حل می‌کنیم:

حالت اول: $x > -۲ \Rightarrow x+۲ > ۰ \xrightarrow{\text{نامعادله} \times ۲(x+۲)} ۲x+۴ < x+b < ۸x+۱۶$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x+۴ < x+b \Rightarrow x < b-۴ \\ x+b < ۸x+۱۶ \Rightarrow x > \frac{b-۱۶}{۷} \end{cases} \Rightarrow \frac{b-۱۶}{۷} < x < b-۴$$

حالت دوم: $x < -۲ \Rightarrow x+۲ < ۰ \xrightarrow{\text{نامعادله} \times ۲(x+۲)} ۲x+۴ > x+b > ۸x+۱۶$

دقت کنید که $x+۲$ منفی فرض شده است، پس جهت نامساوی‌ها باید تغییر کنند.

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x+۴ > x+b \Rightarrow x > b-۴ \\ x+b > ۸x+۱۶ \Rightarrow x < \frac{b-۱۶}{۷} \end{cases} \Rightarrow b-۴ < x < \frac{b-۱۶}{۷}$$

**گام دوم:** حال با مقایسهٔ مجموعهٔ جواب‌های به‌دست‌آمده با مجموعهٔ جواب داده‌شده، بررسی می‌کنیم کدام حالت درست است:

حالت اول: $b-۴=۱ \Rightarrow b=۵ \Rightarrow (-\frac{۱۱}{۷},۱) \subseteq (-۲,+\infty)$ ✓

$$\Rightarrow k = \frac{۵-۱۶}{۷} = -\frac{۱۱}{۷}$$

حالت دوم: $\frac{b-۱۶}{۷}=۱ \Rightarrow b=۲۳$

که در این حالت ابتدای بازه، $k=۱۹$ به دست می‌آید که باید تعریف بازه در تناقض است.

**گام سوم:** بنابراین حالت اول درست است و داریم:

$$b+۷k = ۵+(-۱۱) = -۶$$

**۲** تابع خطی f فقط در بازهٔ $(-1,+\infty)$ مثبت است. مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{f(x)}{x^2-1} \leq 0$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

---

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**Hint** از یه جدول تعیین علامت استفاده کن. علامت $x^2-1$ رو که بلدی، با توجه به بازهٔ داده‌شده می‌تونی علامت $f(x)$ رو هم از علامت خروجی‌هاش مشخص کنی و بعد به سؤال جواب بدی.

**نکته** **تعیین علامت حاصل‌ضرب و تقسیم عبارت‌ها**

برای تعیین علامت یک عبارت که از ضرب یا تقسیم چند عبارت دیگر تشکیل شده است، از جدول تعیین علامت تجمعی استفاده می‌کنیم.

**مراحل انجام کار:**

۱) **یافتن ریشه‌ها:** ابتدا ریشهٔ تمام عبارت‌های موجود در صورت و مخرج را به دست می‌آوریم و روی محور اعداد مشخص می‌کنیم.

۲) **تعیین علامت هر عبارت:** جدول تعیین علامت را تشکیل داده و در سطرهای جداگانه، علامت هر یک از عبارت‌ها را در بازه‌های مختلف مشخص می‌کنیم.

۳) **تعیین علامت نهایی:** در سطر آخر جدول، با در نظر گرفتن قوانین ضرب و تقسیم علامات (تعداد زوجی از منفی‌ها مثبت و تعداد فردی منفی می‌شود)، علامت کل عبارت را در هر بازه به دست می‌آوریم.

**نکات مهم:**

در ریشه‌های صورت، کل عبارت برابر با صفر است ( به شرطی که هم‌زمان ریشهٔ مخرج نباشند).

در ریشه‌های مخرج، کل عبارت تعریف‌نشده است.

**پاسخ خیلی تشریحی** **گام اول:** دقت کنید که تابع f خطی است و فقط در بازهٔ $(-1,+\infty)$ مثبت است، پس می‌توان ضابطهٔ آن را به فرم $f(x)=a(x+1)$ نوشت که در آن $a>0$ است.

**گام دوم:** حال جدول تعیین علامت عبارت $P(x)=\frac{f(x)}{x^2-1}$ را می‌نویسیم:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | | $0$ | $+$ | $0$ | | $+$ |
| $x^2-1$ | $+$ | | $0$ | $-$ | $0$ | | $+$ |
| $P(x)$ | $-$ | | تن | $-$ | تن | | $+$ |

**گام سوم:** با توجه به جدول تعیین علامت، عبارت $P(x)$ فقط در بازهٔ $(1,+\infty)$ مثبت است و تنها به ازای یک عدد طبیعی، آن هم $x=1$ مثبت نیست.

**۳** مجموع جواب‌های غیرمشترک معادلات $x(x-۴)=\sqrt{۴۴۱}$ و $۳x^۲-۱۹x-۱۴=۰$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۳}$
۲) $-\frac{۸}{۳}$
۳) $-\frac{۱۰}{۳}$
۴) $-\frac{۱۱}{۳}$

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

Hint اول هر دو معادله رو جدا جدا حل کن و جواب‌هاشون رو پیدا کن، بعد ببین کدوم جواب‌ها مشترک نیستن.

درس Box

**روش‌های حل معادلهٔ درجه‌دوم**

هر معادله به صورت $ax^۲+bx+c=۰$ که در آن a، b و c اعداد حقیقی و $a\neq ۰$ باشند، یک معادلهٔ درجه‌دوم نامیده می‌شود. منظور از حل معادله، پیداکردن مقادیر حقیقی برای x است که در تساوی صدق کنند.

**روش اول: حل معادله‌های ناقص**

اگر یکی از ضرایب b یا c (یا هر دو) صفر باشد، معادله ناقص است و به راحتی حل می‌شود:

اگر $c=۰$ و $b=۰$ باشد، معادله به شکل $ax^۲=۰$ درآمده و تنها جواب آن $x=۰$ است.

اگر $c=۰$ باشد، معادله به شکل $ax^۲+bx=۰$ است. با فاکتورگیری از x به $x(ax+b)=۰$ می‌رسیم و جواب‌ها $x=۰$ و $x=-\frac{b}{a}$ هستند.

اگر $b=۰$ باشد، معادله به شکل $ax^۲+c=۰$ است که به $x^۲=-\frac{c}{a}$ تبدیل می‌شود. اگر $-\frac{c}{a}\geq ۰$ باشد، جواب‌ها $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ هستند و در غیر این صورت معادله جواب حقیقی ندارد.

**روش دوم: حل معادله‌های کامل**

الف) **روش تجزیه:** در این روش با استفاده از اتحادها (مانند اتحاد جمله‌مشترک)، معادله را به صورت حاصل‌ضرب دو عبارت تبدیل کرده و جواب‌ها را پیدا می‌کنیم.

ب) **روش مربع کامل کردن:**

۱) معادله را به شکل $x^۲+mx=n$ مرتب می‌کنیم (اگر ضریب $x^۲$ یک نبود، همهٔ جملات را بر آن تقسیم می‌کنیم).

۲) مربع نصف ضریب x، یعنی $(\frac{m}{۲})^۲$ را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم.

۳) سمت چپ را به صورت مربع کامل $(x+\frac{m}{۲})^۲$ می‌نویسیم و سپس با ریشه‌گیری معادله را حل می‌کنیم.

ج) **روش کلی یا فرمول دلتا:** این روش برای هر معادله درجه‌دومی جواب می‌دهد. ابتدا دلتا $(\Delta)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴ac$$

اگر $\Delta\geq ۰$ باشد، جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آیند:

$$x_{۱,۲}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

اگر $\Delta<۰$ باشد، معادله جواب حقیقی ندارد.

**روش سوم: تکنیک‌های خاص و میانبرها**

**روش ریشه‌گیری:** برای معادلات به فرم $(ax+b)^۲=c$ اگر $c\geq ۰$ باشد، داریم $ax+b=\pm\sqrt{c}$ و از آن x به دست می‌آید. اگر $c<۰$ باشد، جواب حقیقی وجود ندارد.

**استفاده از اتحاد مزدوج:** برای معادلات به فرم $A^۲=B^۲$ می‌توان آن را به $A^۲-B^۲=۰$ تبدیل و با استفاده از اتحاد مزدوج $(A-B)(A+B)=۰$ آن را حل کرد.

نکته **حالت‌های خاص مجموع ضرایب:**

- اگر $a+b+c=۰$ باشد، یکی از جواب‌ها $x=۱$ و دیگری $x=\frac{c}{a}$ است.
- اگر $a-b+c=۰$ باشد، یکی از جواب‌ها $x=-۱$ و دیگری $x=-\frac{c}{a}$ است.

**پاسخ خیلی تشریحی ✔** **گام اول:** معادلات را به صورت جداگانه حل می‌کنیم:

- $۳x^۲-۱۹x-۱۴=۰ \xrightarrow{\Delta=(-۱۹)^۲-۴(۳)(-۱۴)=۵۲۹} x=\frac{۱۹\pm\sqrt{۵۲۹}}{۶} \Rightarrow x=\frac{۱۹\pm۲۳}{۶} \Rightarrow x=۷, x=-\frac{۲}{۳}$
- $x^۲-۴x=\underbrace{۲۱}_{\sqrt{۴۴۱}} \Rightarrow x^۲-۴x-۲۱=۰ \Rightarrow (x-۷)(x+۳)=۰ \Rightarrow x=۷, x=-۳$

**گام دوم:** بنابراین $x=۷$ جواب مشترک و $x=-۳$ و $x=-\frac{۲}{۳}$ جواب‌های غیرمشترک معادله‌ها هستند که مجموع جواب‌های غیرمشترک برابر است با:

$$-۳+\frac{-۲}{۳}=-\frac{۱۱}{۳}$$

سنجش کلاد

**۴** تابع خطی $f$ را در نظر بگیرید. اگر $x=\frac{۳}{۴}$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $f(۱)x^۲-f(۲)x+۱=۰$ باشد، مقدار $f(۸)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۴}$ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) $\frac{۲۱}{۴}$

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** ضابطهٔ تابع $f$ را $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم و براساس آن معادله را می‌سازیم:

$$\begin{cases} f(۱)=a+b \\ f(۲)=۲a+b \end{cases} \xrightarrow{f(۱)x^۲-f(۲)x+۱=۰} (a+b)x^۲-(۲a+b)x+۱=۰ \quad (۱)$$

**گام دوم:** معادلهٔ درجه‌دوم بالا فقط یک جواب دارد که آن هم $x=\frac{۳}{۴}$ است، پس این معادله باید به فرم $(a+b)(x-\frac{۳}{۴})^۲=۰$ باشد، پس داریم:

$$(a+b)(x^۲-\frac{۳}{۲}x+\frac{۹}{۱۶})=۰ \Rightarrow (a+b)x^۲-\frac{۳}{۲}(a+b)x+\frac{۹}{۱۶}(a+b)=۰ \qquad (۲)$$

**گام سوم:** دو معادلهٔ (۱) و (۲) باید یکسان باشند، پس ضرایب را نظیربه‌نظیر برابر قرار می‌دهیم:

$$-(۲a+b)=-\frac{۳}{۲}(a+b) \Rightarrow \frac{a}{۲}=\frac{b}{۲} \Rightarrow a=b$$

$$\frac{۹}{۱۶}(a+b)=۱ \Rightarrow a+b=\frac{۱۶}{۹}$$

پس دستگاه معادلات $\begin{cases} a=b \\ a+b=\frac{۱۶}{۹} \end{cases}$ را داریم که جواب آن $a=b=\frac{۸}{۹}$ است.

**گام چهارم:** پس ضابطهٔ تابع $f$ به صورت $f(x)=\frac{۸}{۹}(x+۱)$ بوده است و با توجه به آن خواستهٔ سؤال را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$f(۸)=\frac{۸}{۹}\times ۹=۸$$

**۵** **اگر ریشه‌های معادلهٔ $(x^۲+mx)(x^۲-۴x+۳)=۰$ چهار عدد صحیح و متوالی باشند، در حل معادلهٔ $x^۲+mx=۱-۳m$ به روش مربع کامل، از کدام عدد ثابت جذر گرفته می‌شود؟**

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

---

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**Hint** اول از اون ۴تا ریشهٔ صحیح و متوالی استفاده کن تا مقدار m رو پیدا کنی. بعدش m رو بذار تو معادلهٔ دوم و با روش مربع کامل حلش کن.

**پاسخ خیلی تشریحی** **گام اول:** ابتدا با توجه به صحیح و متوالی بودن ریشه‌های معادلهٔ اول، مقدار m را مشخص می‌کنیم:

$$\underbrace{(x-۱)(x-۳)}_{x^۲-۴x+۳}\underbrace{x(x+m)}_{x^۲+mx}=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \\ x=-m \\ x=۳ \end{cases}$$

با توجه به فرض متوالی‌بودن ۴ جواب صحیح، $-m$ باید برابر ۲ باشد، در نتیجه مقدار m برابر $-۲$ است.

**گام دوم:** حالا با جای‌گذاری مقدار m ، معادلهٔ دوم را بازنویسی کرده و به روش مربع کامل آن را حل می‌کنیم:

$$x^۲-۲x=۷ \xrightarrow{\text{اضافه کردن توان دوم نصف ضریب x}} x^۲-۲x+۱=۷+۱ \Rightarrow (x-۱)^۲=۸$$

بنابراین در حل معادله به روش مربع کامل از عدد ۸ جذر می‌گیریم.

**۶** به ازای کدام مقدار m، در معادلهٔ $(x+2)^3-(x+1)^3-mx=0$ مجموع جواب‌ها برابر ۶ است؟

۱) ۹ ۲) ۲۷

۳) $-27$ ۴) $-9$

---

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**Hint** یادت باشه که مجموع جواب‌های متمایز معادلهٔ درجه‌دو از فرمول $-\frac{b}{a}$ به دست میاد. فقط اول باید معادله رو مرتب کنی.

**درس Box**

**روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادلهٔ درجه‌دوم**

برای معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ که دارای جواب‌های $x_1$ و $x_2$ است، می‌توان مجموع، حاصل‌ضرب و تفاضل جواب‌ها را بدون محاسبهٔ مستقیم خود جواب‌ها و تنها با استفاده از ضرایب a، b و c دست آورد:

**مجموع جواب‌ها (S)**: این رابطه از جمع دو جواب در فرمول کلی به دست می‌آید:

$$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

**حاصل‌ضرب جواب‌ها (P)**: این رابطه از ضرب دو جواب در فرمول کلی به دست می‌آید:

$$P=x_1\times x_2=\frac{c}{a}$$

**قدرمطلق تفاضل جواب‌ها:**

$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\quad (\text{که در آن } \Delta=b^2-4ac)$$

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** ابتدا معادله را به کمک اتحاد مکعب سه‌جمله‌ای بازنویسی می‌کنیم:

$$x^3+6x^2+12x+8-(x^3+3x^2+3x+1)-mx=0 \Rightarrow 3x^2+(9-m)x+7=0$$

**گام دوم:** حال با توجه به روابط بین جواب‌ها و ضرایب معادلهٔ درجه‌دوم داریم:

$$\xrightarrow{S=-\frac{b}{a}} S=\frac{-(9-m)}{3} \Rightarrow 6=\frac{m-9}{3} \Rightarrow 18=m-9 \Rightarrow m=27$$

در انتها حواسمان باشد که با جای‌گذاری m، حتماً $\Delta$ ی معادله، مثبت شود:

$$\xrightarrow{m=27} 3x^2-18x+7=0 \quad \Delta=(-18)^2-4(3)(7)>0$$

**۷** طول و عرض مستطیلی یک واحد اختلاف دارند. اگر مساحت مستطیل برابر $\sqrt{۶-۴\sqrt{۲}}$ باشد، محیط آن کدام است؟

۱) $۲(\sqrt{۲}-۱)$
۲) $۲(\sqrt{۲}+۱)$
۳) $۲(۲\sqrt{۲}+۱)$
۴) $۲(۲\sqrt{۲}-۱)$

---

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**Hint** اگه طول و عرض رو به ترتیب $x+۱$ و $x$ در نظر بگیری، می‌تونی با استفاده از مساحت داده‌شده، یه معادلهٔ درجه‌دو بسازی و حلش کنی.

**پاسخ خیلی تشریحی** **گام اول:** فرض می‌کنیم طول مستطیل برابر $x+۱$ باشد، در نتیجه عرض مستطیل برابر $x$ است و داریم:

$$x(x+۱)=\sqrt{۶-۴\sqrt{۲}} \Rightarrow x(x+۱)=\sqrt{(۲-\sqrt{۲})^۲} \Rightarrow x^۲+x=۲-\sqrt{۲} \Rightarrow x^۲+x+\sqrt{۲}-۲=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=۱+۸-۴\sqrt{۲}} x=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+۸-۴\sqrt{۲}}}{۲} \Rightarrow x=\frac{-۱\pm\sqrt{(۱-\sqrt{۸})^۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-۱\pm(۲\sqrt{۲}-۱)}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x=-۱+\sqrt{۲} & \text{ق ق} \\ x=-\sqrt{۲} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

**گام دوم:** حال محیط مستطیل را با دانستن مقدار $x$ حساب می‌کنیم:

$$P=۲(\underbrace{x}_{\text{عرض}}+\underbrace{x+۱}_{\text{طول}})=۲(۲x+۱)=۲(۲\sqrt{۲}-۲+۱)=۲(۲\sqrt{۲}-۱)$$

**نکته** در ساده‌سازی‌های بالا از اتحاد رادیکال مرکب استفاده کردیم:

$$\sqrt{A\pm۲\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}: \begin{cases} A=x+y \\ B=xy \end{cases}$$

**مثال**

$$\sqrt{۶-۴\sqrt{۲}}=\sqrt{۶-۲\sqrt{۸}} \xrightarrow{\text{اعداد ۴ و ۲}} \sqrt{۶-۴\sqrt{۲}}=\sqrt{۴}-\sqrt{۲}=۲-\sqrt{۲}$$

(۶: مجموع، ۸: حاصل‌ضرب)

$$\sqrt{۹-۴\sqrt{۲}}=\sqrt{۹-۲\sqrt{۸}} \xrightarrow{\text{اعداد ۱ و ۸}} \sqrt{۹-۴\sqrt{۲}}=\sqrt{۸}-\sqrt{۱}=۲\sqrt{۲}-۱$$

**۸** اگر $\alpha$ و $\beta$ جواب‌های معادلهٔ $x(x-1)=x+7$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^3-11\beta)$ برابر کدام است؟

۱) ۹۱
۲) ۹۸
۳) ۱۰۵
۴) ۱۱۲

---

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**Hint** لازم نیست خودِ آلفا و بتا رو پیدا کنی! از خود معادلهٔ اصلی $(x^2-2x=7)$ استفاده کن تا بتونی عبارت‌های داخل پرانتز رو ساده کنی.

**درس Box**

**محاسبهٔ عبارات متقارن برحسب S و P**

اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $\alpha$ و $\beta$ باشند، می‌توان بسیاری از عبارت‌های شامل ریشه‌ها را بدون محاسبهٔ مستقیم آن‌ها و تنها برحسب مجموع $(S=\alpha+\beta)$ و حاصل‌ضرب $(P=\alpha\beta)$ ریشه‌ها به دست آورد:

**مجموع معکوس ریشه‌ها:** با مخرج‌مشترک گرفتن به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}$$

**مجموع مربع‌های ریشه‌ها:** با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای به دست می‌آید:

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P$$

**مجموع مکعب‌های ریشه‌ها:** با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای به دست می‌آید:

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3SP$$

**قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها:**

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{S^2-4P}$$

**نکته**

**استفاده از خود معادله**

از آن‌جایی که ریشه‌های یک معادله در خود آن معادله صدق می‌کنند، می‌توانیم از این ویژگی برای ساده‌سازی عباراتی که شامل توان‌های بالای یک ریشه هستند، استفاده کنیم.

**راهبرد:** اگر $\alpha$ ریشهٔ معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشد، پس حتماً تساوی $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ برقرار است. از این تساوی می‌توان برای جایگزینی توان‌های بالای $\alpha$ با عبارت‌های ساده‌تر استفاده کرد. معمولاً عبارت $a\alpha^2$ را با عبارت خطی $-b\alpha-c$ جایگزین می‌کنیم.

**مثال** اگر $\alpha$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-5=0$ باشد، حاصل عبارت $\alpha^2-3\alpha+1$ چه‌قدر است؟

حل: چون $\alpha$ ریشهٔ معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$\alpha^2-3\alpha-5=0$$

با مرتب‌کردن این تساوی، مقدار عبارت $\alpha^2-3\alpha$ به دست می‌آید:

$$\alpha^2-3\alpha=5$$

حالا این مقدار را در عبارت خواسته‌شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(\alpha^2-3\alpha)+1=(5)+1=6$$

پاسخ: حاصل عبارت برابر با ۶ است.

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x^2-x=x+7 \Rightarrow x^2-2x=7$$

**گام دوم:** حال با توجه به این‌که $\alpha$ و $\beta$ جواب‌های این معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند:

$$\alpha^2-2\alpha=7$$

$$\beta^2-2\beta=7 \Rightarrow \beta^2=2\beta+7 \Rightarrow \beta^3=2\beta^2+7\beta \Rightarrow \beta^3=2(2\beta+7)+7\beta \Rightarrow \beta^3=11\beta+14$$

**گام سوم:** با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده در عبارت خواسته‌شده داریم:

$$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^3-11\beta)=7(11\beta+14-11\beta)=7\times14=98$$

**۹** در معادلهٔ $x(۴x^۲ - ۹\sqrt{۲x}) + ۴ = ۰$، نسبت جواب بزرگ‌تر به جواب کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۴\sqrt{۲}$

۳) ۸ ۴) $۸\sqrt{۲}$

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**Hint** معادله رو یه جوری مرتب کن که بتونی از تغییر متغیر $t = x^۳$ استفاده کنی و یه معادلهٔ درجه‌دو ساده به دست بیاری.

**درس Box**

**روش حل معادله با تغییر متغیر**

گاهی اوقات یک معادله، با وجود آن‌که در ظاهر پیچیده است، ساختاری شبیه به معادلات ساده‌تر (مانند معادلهٔ درجه‌دوم) دارد. در این موارد، با استفاده از روش تغییر متغیر (که به آن جانشینی هم می‌گویند)، می‌توانیم معادله را ساده کرده و حل کنیم.

**مراحل روش تغییر متغیر:**

۱) **تشخیص عبارت تکرارشونده:** عبارتی را در معادله پیدا می‌کنیم که خود آن و توان‌های بالاترش در معادله وجود دارند.

۲) **تعریف متغیر جدید:** عبارت تکرارشونده را برابر با یک متغیر جدید (مانند $u$ یا $t$) قرار می‌دهیم.

۳) **جای‌گذاری و حل معادلهٔ جدید:** معادلهٔ اصلی را برحسب متغیر جدید بازنویسی کرده و معادلهٔ ساده‌تر به‌دست‌آمده را حل می‌کنیم.

۴) **بازگرداندن متغیر اصلی:** مقادیر به‌دست‌آمده برای متغیر جدید را در رابطهٔ تعریف‌شده در مرحلهٔ ۲ قرار داده و معادله(های) نهایی را برای متغیر اصلی $(x)$ حل می‌کنیم تا جواب‌های مسئله پیدا شوند.

**مثال** معادلهٔ $x^۴ - ۱۳x^۲ + ۳۶ = ۰$ را حل کنید.

مرحلهٔ ۱ (تشخیص): عبارت $x^۲$ در معادله تکرار شده و معادله را می‌توان به صورت $(x^۲)^۲ - ۱۳(x^۲) + ۳۶ = ۰$ نوشت.

مرحلهٔ ۲ (تعریف متغیر): متغیر جدید را تعریف می‌کنیم: $u = x^۲$.

مرحلهٔ ۳ (حل معادلهٔ جدید): معادلهٔ جدید برحسب $u$ به صورت $u^۲ - ۱۳u + ۳۶ = ۰$ است. با تجزیه، به $(u-۹)(u-۴) = ۰$ می‌رسیم که جواب‌های آن $u = ۹$ و $u = ۴$ هستند.

مرحلهٔ ۴ (بازگرداندن متغیر): حالا مقادیر $u$ را جایگزین می‌کنیم تا $x$ را پیدا کنیم:

اگر $u = ۹$ باشد $x = \pm ۳$ $\Rightarrow x^۲ = ۹$.

اگر $u = ۴$ باشد $x = \pm ۲$ $\Rightarrow x^۲ = ۴$.

نتیجهٔ نهایی: مجموعهٔ جواب‌های معادله برابر با $\{۳, ۲, -۲, -۳\}$ است.

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$۴x^۳ - ۹x\sqrt{۲x} + ۴ = ۰ \Rightarrow ۴x^۳ + ۴ = ۹x\sqrt{۲x}$$

**گام دوم:** با به توان ۲ رساندن طرفین معادله داریم:

$$(۴x^۳ + ۴)^۲ = (۹x\sqrt{۲x})^۲ \Rightarrow ۱۶x^۶ + ۳۲x^۳ + ۱۶ = ۸۱x^۲ \times ۲x \Rightarrow ۱۶x^۶ + ۳۲x^۳ + ۱۶ = ۱۶۲x^۳$$

$$\xrightarrow{\div ۲} ۸x^۶ + ۱۶x^۳ + ۸ = ۸۱x^۳ \Rightarrow ۸x^۶ - ۶۵x^۳ + ۸ = ۰$$

**گام سوم:** با تغییر متغیر $t = x^۳$ داریم:

$$۸t^۲ - ۶۵t + ۸ = ۰ \Rightarrow (۸t-۱)(t-۸) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{۱}{۸} \Rightarrow x^۳ = \frac{۱}{۸} \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \\ t = ۸ \Rightarrow x^۳ = ۸ \Rightarrow x = ۲ \end{cases}$$

پس نسبت جواب بزرگ‌تر به جواب کوچک‌تر برابر $\frac{۲}{\frac{۱}{۲}} = ۴$ است.

**۱۰** در معادلهٔ $x^۴ - \sqrt{۶}x^۲ + \sqrt{۲} = ۰$، مجموع مربعات جواب‌ها کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) ۶

۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) ۱۲

---

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**Hint** با تغییر متغیر $t = x^۲$ معادله رو به یه معادلهٔ درجه‌دو تبدیل کن. بعد ببین مجموع مربعات جواب‌های معادلهٔ اصلی چه رابطه‌ای با مجموع جواب‌های این معادلهٔ جدیده داره.

**پاسخ خیلی تشریحی** **گام اول:** ابتدا معادله را با تغییر متغیر $x^۲ = t$ بازنویسی می‌کنیم:

$$t^۲ - \sqrt{۶}t + \sqrt{۲} = ۰ \quad (*)$$

**گام دوم:** در معادلهٔ درجه‌دوم حاصل‌شده (برحسب t)، $\Delta = ۶ - ۴\sqrt{۲} > ۰$، $S = \sqrt{۶} > ۰$ و $P = \sqrt{۲} > ۰$، پس دو جواب مثبت مانند $\alpha$ و $\beta$ داریم. در نتیجه جواب‌های معادلهٔ اصلی برابر است با:

$$x_۱ = \sqrt{\alpha} \ , \ x_۲ = -\sqrt{\alpha} \ , \ x_۳ = \sqrt{\beta} \ , \ x_۴ = -\sqrt{\beta}$$

**گام سوم:** مجموع مربعات جواب‌ها برابر است با:

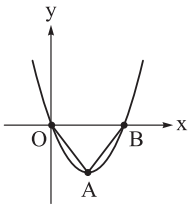
$$(\sqrt{\alpha})^۲ + (-\sqrt{\alpha})^۲ + (\sqrt{\beta})^۲ + (-\sqrt{\beta})^۲ = ۲(\alpha + \beta)$$

**گام چهارم:** برای محاسبهٔ $\alpha + \beta$ از معادلهٔ درجه‌دوم $(*)$ استفاده می‌کنیم:

$$S = \alpha + \beta = \sqrt{۶} \ \Rightarrow \ ۲(\alpha + \beta) = ۲\sqrt{۶}$$

**نکته** معادلهٔ دومجذوری درجه‌چهارم $ax^۴ + bx^۲ + c = ۰$ با شرط‌های $b^۲ - ۴a > ۰$، $\frac{b}{a} < ۰$ و $\frac{c}{a} > ۰$ چهار جواب دارد که مجموع آن‌ها برابر صفر و مجموع مربعات آن‌ها برابر $-\frac{۲b}{a}$ است.

**۱۱** نمودار تابع درجه‌دوم $y = f(x)$ مطابق شکل مفروض است. اگر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع OAB برابر $۳\sqrt{۳}$ باشد، مقدار $f(۱)$ کدام است؟




۱) $۲(۱-\sqrt{۳})$
۲) $-\sqrt{۳}$
۳) $۱-۲\sqrt{۳}$
۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

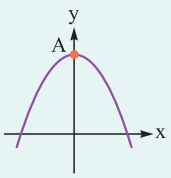
**Hint**

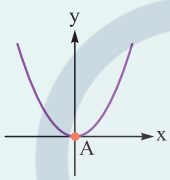
اول از فرمول مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع استفاده کن تا طول ضلعش رو پیدا کنی. این‌جوری مختصات نقطهٔ B به دست میاد و می‌تونی ضابطهٔ سهمی رو بنویسی.

**درس Box**

**تعریف سهمی و ویژگی‌های اصلی**

- نمودار معادلهٔ درجه‌دوم $y = ax^۲ + bx + c$ (به شرط $a \neq ۰$) یک سهمی نامیده می‌شود.
- علامت ضریب a جهت دهانهٔ سهمی را مشخص می‌کند؛ اگر $a > ۰$ دهانه رو به بالا و اگر $a < ۰$ دهانه رو به پایین است.
- پایین‌ترین یا بالاترین نقطهٔ نمودار، رأس سهمی نام دارد.
- خط عمودی که از رأس می‌گذرد، محور تقارن سهمی است.




**معادلهٔ سهمی با استفاده از ریشه‌ها (نقاط برخورد با محور آن‌ها)**

بسته به این‌که سهمی محور xها را در چند نقطه قطع کند، معادلهٔ آن را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت (به شرط $a \neq ۰$):

**حالت اول:** سهمی محور xها را در دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ قطع می‌کند.

**معادله:** $y = a(x - x_۱)(x - x_۲)$

**محور تقارن:** $x = \frac{x_۱ + x_۲}{۲}$

**حالت دوم:** سهمی بر محور xها در یک نقطهٔ $x_۱$ مماس است.

**معادله:** $y = a(x - x_۱)^۲$

**محور تقارن:** $x = x_۱$ (در این حالت، رأس سهمی روی محور xها قرار دارد.)

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** ابتدا توجه کنید که $x_O = ۰$ و $x_B$ طول صفرهای سهمی ما هستند، پس معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$f(x) = a(x - ۰)(x - x_B) = ax(x - x_B)$$

**گام دوم:** به کمک رابطهٔ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع داریم:

$$S_{OAB} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}OB^۲ \Rightarrow ۳\sqrt{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}OB^۲ \xrightarrow{OB>۰} OB^۲ = ۱۲ \xrightarrow{OB>۰} OB = ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow x_B - x_O = ۲\sqrt{۳} \xrightarrow{x_O=۰} x_B = ۲\sqrt{۳}$$

**گام سوم:** با جای‌گذاری مقدار $x_B$ معادله را بازنویسی کرده و مختصات نقطهٔ A را مشخص می‌کنیم:

$$f(x) = a(x)(x - ۲\sqrt{۳}) \ , \ x_A = \frac{x_O + x_B}{۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}$$

$$f(\sqrt{۳}) = a(\sqrt{۳})(-\sqrt{۳}) = -۳a \Rightarrow A(\sqrt{۳}, -۳a)$$

**گام چهارم:** دقت کنید که قدرمطلق عرض نقطهٔ A برابر ارتفاع مثلث است و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y_A = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}OB \Rightarrow y_A = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲\sqrt{۳}) = -۳$$

پس داریم:

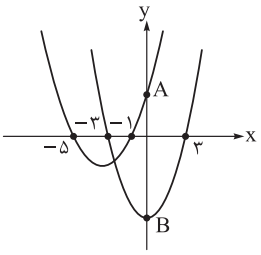
$$-۳a = -۳ \Rightarrow a = ۱$$

**گام پنجم:** ضابطهٔ f را کامل کرده و مقدار $f(۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = x(x - ۲\sqrt{۳}) \Rightarrow f(۱) = ۱(۱ - ۲\sqrt{۳}) = ۱ - ۲\sqrt{۳}$$

سنجش کلاد

**۱۳۲** در شکل مقابل، دو سهمی یکدیگر را در نقطه‌ای به عرض $-\frac{۳۲}{۳}$ قطع کرده‌اند. اگر ضرایب جملهٔ $x^۲$ در معادله‌های هر دو سهمی برابر باشد، طول پاره‌خط AB کدام است؟




۱) ۱۲

۲) ۲۷

۳) ۳۶

۴) ۴۲

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**Hint** با توجه به محل‌های برخورد سهمی با محور xها که از روی نمودار مشخصه، معادلهٔ هر دو سهمی رو به صورت $y=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ بنویس. بعد می‌تونی از عرض نقطهٔ تقاطعشون برای پیداکردن a استفاده کنی.

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** معادلهٔ هر دو سهمی را با توجه به صفرهای آن‌ها و برابری ضریب $x^۲$ مشخص می‌کنیم:

$$y=a(x+۵)(x+۱)$$

$$y=a(x+۳)(x-۳)$$

**گام دوم:** برای مشخص‌کردن محل برخورد این دو سهمی، داریم:

$$a(x+۳)(x-۳)=a(x+۵)(x+۱) \xrightarrow{\div a} x^۲-۹=x^۲+۶x+۵ \Rightarrow ۶x=-۱۴ \Rightarrow x=-\frac{۱۴}{۶}=-\frac{۷}{۳}$$

**گام سوم:** با قراردادن نقطهٔ $(-\frac{۷}{۳},-\frac{۳۲}{۳})$ در معادلهٔ یکی از سهمی‌ها مقدار a را مشخص می‌کنیم:

$$-\frac{۳۲}{۳}=a((-\frac{۷}{۳})^۲-۹) \Rightarrow -\frac{۳۲}{۳}=-\frac{۳۲}{۹}a \Rightarrow a=۳$$

**گام چهارم:** با جای‌گذاری مقدار a، محل برخورد دو سهمی با محور yها را پیدا کرده و طول پاره‌خط AB را محاسبه می‌کنیم:

$$y=۳(x^۲+۶x+۵) \xrightarrow{x=۰} y=۱۵ \Rightarrow A(۰,۱۵)$$

$$y=۳(x^۲-۹) \xrightarrow{x=۰} y=-۲۷ \Rightarrow B(۰,-۲۷)$$

$$\Rightarrow AB=|-۲۷-۱۵|=۴۲$$

**۱۳** نمودار تابع درجه‌دوم $f(x)=ax^2+(a-1)x+a-2$ از هر چهار ناحیهٔ دستگاه مختصات عبور می‌کند. کدام گزینه الزاماً درست است؟

۱) ممکن است نمودار، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع کند.

۲) نمودار ممکن است بیشترین مقدار را داشته باشد.

۳) طول رأس این سهمی حتماً منفی است.

۴) عرض رأس این سهمی حتماً منفی است.

---

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

Hint یه سهمی برای این‌که از هر چهار ناحیه بگذره، چه شرط‌هایی باید داشته باشه؟ (به علامت ریشه‌ها و دلتا فکر کن.)

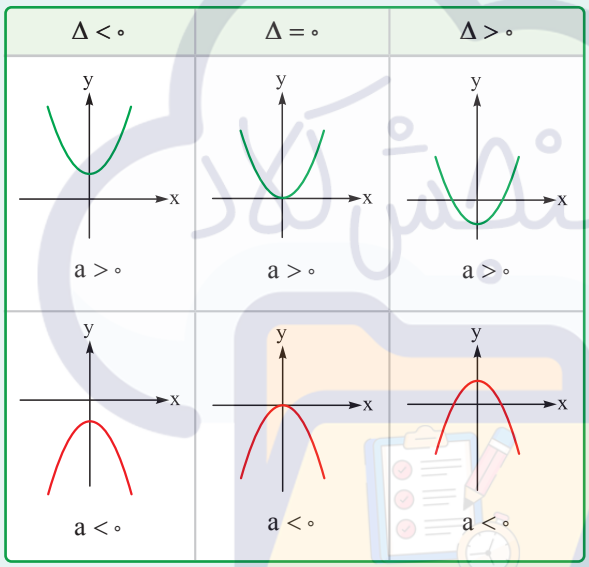
درس Box

**تحلیل موقعیت سهمی در صفحهٔ مختصات**

موقعیت کلی سهمی $y=ax^2+bx+c$ را می‌توان با بررسی علامت ضریب $a$ و مقدار دلتا $(\Delta)$ و همچنین علامت ریشه‌ها و موقعیت رأس تعیین کرد.

**۱) تعیین موقعیت سهمی با علامت $a$ و $\Delta$**

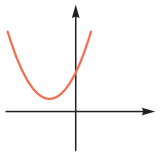
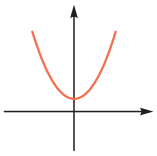
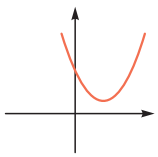
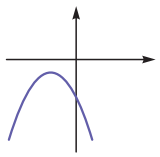
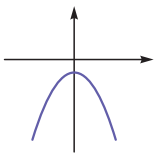
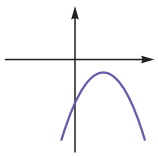
علامت $a$ جهت دهانهٔ سهمی و علامت $\Delta$ تعداد ریشه‌های حقیقی (نقاط برخورد با محور $x$ها) را مشخص می‌کند.




**۲) تعیین موقعیت رأس نسبت به محور $y$ها (با علامت $b$)**

اگر $\Delta<0$ باشد، سهمی به طور کامل بالای $(a>0)$ یا پایین $(a<0)$ محور $x$ها است و فقط از دو ناحیه عبور می‌کند. اگر سهمی از هر چهار ناحیهٔ صفحهٔ مختصات بگذرد، حتماً $\Delta>0$ و علامت $a$ و $c$ مخالف هم است $(\frac{c}{a}<0)$.

علامت عبارت $-\frac{b}{a}$ مشخص می‌کند که رأس سهمی (و محور تقارن) در کدام سمت محور y ها قرار دارند.

| $-\frac{b}{a}>0$ | $(b=0)\ -\frac{b}{a}=0$ | $-\frac{b}{a}<0$ |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $a>0$ | $a>0$ | $a>0$ |
|  |  |  |
| $a<0$ | $a<0$ | $a<0$ |

اگر a و b مخالف علامت باشند، $-\frac{b}{a}$ مثبت شده و رأس در سمت راست محور yها است.

اگر a و b هم‌علامت باشند، $-\frac{b}{a}$ منفی شده و رأس در سمت چپ محور y ها است.

اگر $b=0$ باشد، رأس روی محور yها قرار دارد.

**پاسخ خیلی تشریحی ✔**

**گام اول:** ابتدا طبق درس‌باکس شرایط عبور از هر چهار ناحیه را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}\frac{c}{a}<0 \Rightarrow \frac{a-2}{a}<0 \Rightarrow a\in(0,2)\\ \Delta>0 \Rightarrow (a-1)^2-4a(a-2)>0 \Rightarrow -3a^2+6a+1>0 \Rightarrow a\in(\frac{3-2\sqrt{3}}{3},\frac{3+2\sqrt{3}}{3})\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a\in(0,2)$$

**گام دوم:** حال با توجه به محدودهٔ a گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱):

$$0<a<2 \Rightarrow -2<a-2<0$$

در نتیجه سهمی همواره محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با عرض منفی قطع می‌کند.

گزینهٔ (۲):

$$0<a<2$$

در نتیجه سهمی همواره رو به بالا و دارای کم‌ترین مقدار است.

گزینهٔ (۳):

$$\xrightarrow{x_S=-\frac{b}{2a}} x_S=\frac{1-a}{2a} \xrightarrow{x_S<0} a\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$$

چون محدودهٔ به‌دست‌آمده برای منفی‌بودن طول رأس سهمی، زیرمجموعهٔ به‌دست‌آمده برای a نیست، پس این گزینه نیز درست نیست.

گزینهٔ (۴): طبق گزینهٔ (۱) این عبارت همواره درست است.

**تیزبازی**

دقت کنید که باتوجه به نوع نگارش، قطعاً یکی از گزینه‌های (۱) و (۴) درست است زیرا عرض رأس سهمی یا قطعاً منفی است یا می‌تواند مثبت هم باشد، پس بعد از به دست آوردن محدودهٔ a، کافی است یکی از این دو گزینه را بررسی کنیم.

**۱۴** خط $y=۱۱$ در نقاط A و B و خط $y=k$ در نقاط C و D، سهمی $y=۳۶-x^۲$ را قطع می‌کند. اگر مساحت چهارضلعی ABCD برابر ۸۱ باشد، مقدار k کدام است؟ $(k>۱۱)$

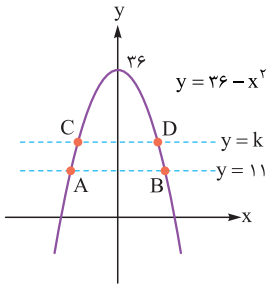
۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۲۷ ۴) ۳۲

---

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**Hint** مساحت ذوزنقه از فرمول « $\frac{\text{مجموع دو قاعده در ارتفاع}}{۲}$ » به دست میاد. طول قاعده‌ها و ارتفاع رو برحسب k پیدا کن و تو فرمول بذار.

**پاسخ خیلی تشریحی** **گام اول:** ابتدا شکل مقابل را در نظر بگیرید:




**گام دوم:** برای محاسبهٔ مساحت ذوزنقهٔ ABCD مختصات نقاط A، B، C و D را مشخص می‌کنیم:

$$۳۶-x^۲=۱۱ \Rightarrow x^۲=۲۵ \Rightarrow x=\pm ۵ \Rightarrow A(-۵,۱۱), B(۵,۱۱) \Rightarrow AB=۱۰$$

$$۳۶-x^۲=k \Rightarrow x^۲=۳۶-k \Rightarrow x=\pm\sqrt{۳۶-k} \Rightarrow C(-\sqrt{۳۶-k},k), D(\sqrt{۳۶-k},k)$$
$$\Rightarrow CD=۲\sqrt{۳۶-k}$$

حالا مساحت ذوزنقه را بر حسب k حساب می‌کنیم و برابر ۸۱ قرار می‌دهیم:

$$S_{ABCD}=\frac{(k-۱۱)(۱۰+۲\sqrt{۳۶-k})}{۲} \Rightarrow ۸۱=(k-۱۱)(۵+\sqrt{۳۶-k}) \quad (*)$$

**گام سوم:** برای حل معادلهٔ $(*)$ عبارت $\sqrt{۳۶-k}$ را متغیر جدید t در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\sqrt{۳۶-k}=t \Rightarrow ۳۶-t^۲=k \Rightarrow (۳۶-t^۲-۱۱)(۵+t)=۸۱$$
$$\Rightarrow (۲۵-t^۲)(۵+t)=۸۱ \Rightarrow -t^۳-۵t^۲+۲۵t+۱۲۵-۸۱=۰$$
$$\Rightarrow t^۳+۵t^۲-۲۵t-۴۴=۰$$

با تجزیهٔ عبارت بالا داریم:

$$(t-۴)(t^۲+۹t+۱۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t-۴=۰ \Rightarrow t=۴ \Rightarrow \sqrt{۳۶-k}=۴ \Rightarrow ۳۶-k=۱۶ \Rightarrow k=۲۰ \checkmark \\ t^۲+۹t+۱۱=۰ \xrightarrow[S<۰,\,P>۰]{\Delta>۰} \end{cases}$$

هر دو جواب این معادله، منفی است و با شرط مثبت بودن $t=\sqrt{۳۶-k}$ در تناقض است.

**تیزبازی** البته با توجه به این‌که خود جواب‌های معادله در گزینه‌ها هست، نیاز به حل معادلهٔ $(*)$ نداریم، بلکه کافی است اعداد گزینه‌ها را در این معادله جای‌گذاری کنیم:

$$k=۲۰ \xrightarrow{(*)} ۸۱=(۲۰-۱۱)(۵+\sqrt{۳۶-۲۰})=۹\times(۵+۴)=۸۱ \checkmark$$

**۱۵** سهمی $y = x^۲ - ۳x + k$ همواره بالاتر از خط $y = ۲x - ۱$ قرار دارد. اگر $k$ کم‌ترین مقدار صحیح ممکن باشد، کم‌ترین فاصلهٔ سهمی از محور طول‌ها کدام است؟

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۲/۷۵
۴) ۳/۷۵

---

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**Hint**

این‌که سهمی همیشه بالای خط باشه، یعنی نامعادلهٔ «سهمی > خط» باید همیشه برقرار باشه. این نامعادله رو تشکیل بده و شرط همیشه مثبت بودنش رو بررسی کن (دلتا باید منفی باشه).

**درس Box**

**تعیین علامت عبارت درجه‌دوم $(ax^۲ + bx + c)$**

علامت عبارت درجه‌دوم به مقدار دلتا $(\Delta = b^۲ - ۴ac)$ و علامت ضریب $a$ بستگی دارد. سه حالت کلی برای تعیین علامت وجود دارد:

**حالت اول:** $\Delta > ۰$

معادله، دو ریشهٔ حقیقی متمایز $(\{x_۲, x_۱\})$ دارد. علامت عبارت در بازهٔ بین دو ریشه، مخالف علامت $a$ و در خارج از دو ریشه، موافق علامت $a$ است.

**حالت دوم:** $\Delta = ۰$

معادله، یک ریشهٔ حقیقی مضاعف $(\{x_۱\})$ دارد. علامت عبارت در همه‌جا موافق علامت $a$ است، به‌جز در خود ریشه که مقدار عبارت صفر می‌شود.

**حالت سوم:** $\Delta < ۰$

معادله، ریشهٔ حقیقی ندارد. علامت عبارت برای تمام مقادیر $x$، همواره موافق علامت $a$ است.

نکات کلیدی:

اگر $a > ۰$ و $\Delta < ۰$ باشد، عبارت همواره مثبت است.

اگر $a < ۰$ و $\Delta < ۰$ باشد، عبارت همواره منفی است.

اگر $a > ۰$ و $\Delta \le ۰$ باشد، عبارت همواره نامنفی (مثبت یا صفر) است.

اگر $a < ۰$ و $\Delta \le ۰$ باشد، عبارت همواره نامثبت (منفی یا صفر) است.

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** سهمی از خط مورد نظر همواره بالاتر است، پس باید نامعادلهٔ زیر همواره برقرار باشد:

$$x^۲ - ۳x + k > ۲x - ۱ \Rightarrow x^۲ - ۵x + k + ۱ > ۰$$

**گام دوم:** نامعادلهٔ اخیر زمانی همواره برقرار است که $\Delta$ ی عبارت درجه‌دوم منفی باشد:

$$۲۵ - ۴k - ۴ < ۰ \Rightarrow ۴k > ۲۱ \Rightarrow k > \frac{۲۱}{۴} \xrightarrow{k \text{ کم‌ترین مقدار صحیح}} k = ۶ \Rightarrow y = x^۲ - ۳x + ۶$$

**گام سوم:** سهمی به‌دست‌آمده با محور $x$ها برخوردی ندارد (زیرا $\Delta < ۰$ و $a > ۰$ است)، پس کم‌ترین فاصلهٔ آن تا محور طول‌ها برابر عرض رأس آن است:

$$x_s = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y_s = (\frac{۳}{۲})^۲ - ۳(\frac{۳}{۲}) + ۶ = \frac{۹}{۴} - \frac{۹}{۲} + ۶ = \frac{۱۵}{۴} = ۳/۷۵$$

**۱۶** نمودار تابع درجه‌دوم $y=f(x)$ در نقطهٔ A بر خط $y=۵$ مماس است و خط $y=۱$ نیز نمودار آن را در دو نقطهٔ B و C قطع می‌کند. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۸ باشد، اختلاف صفرهای تابع کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۵\sqrt{۳}$

۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

---

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**Hint** نقطه‌ای که خط افقی بر سهمی مماس می‌شه، همون رأس سهمیه! از این نکته و اطلاعات مساحت مثلث استفاده کن تا ضابطهٔ سهمی رو پیدا کنی.

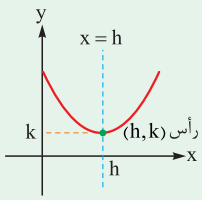
**نکته** **معادلهٔ سهمی با استفاده از رأس (فرم استاندارد)**

معادلهٔ هر سهمی را می‌توان به فرم استاندارد (یا رأسی) به صورت زیر نوشت:

$$y=a(x-h)^۲+k \quad (a\neq ۰)$$

در این فرم، ویژگی‌های اصلی سهمی به سادگی قابل تشخیص است:

- مختصات رأس سهمی برابر با $(h,k)$ می‌باشد.
- خط عمودی $x=h$ محور تقارن سهمی است.

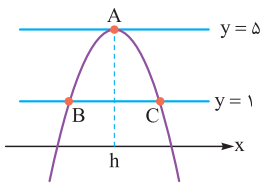



**پاسخ خیلی تشریحی** **گام اول:** از آن‌جایی که خط $y=۵$ بر سهمی مماس است، نقطهٔ تماس همان رأس سهمی است؛ بنابراین رأس سهمی نقطهٔ $S(h,۵)$ و معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$f(x)=a(x-h)^۲+۵$$

هم‌چنین ارتفاع مثلث ABC فاصلهٔ عمودی رأس A از قاعدهٔ BC است که برابر است با:

$$y_A-y_{BC}=۵-۱=۴$$




**گام دوم:** با استفاده از فرمول مساحت مثلث، طول قاعدهٔ BC را پیدا می‌کنیم:

$$۸=\frac{۱}{۲}\times(BC)\times ۴ \Rightarrow BC=۴$$

**گام سوم:** با توجه به این‌که B و C نقاط برخورد نمودار سهمی با خط $y=۱$ هستند، داریم:

$$۱=a(x-h)^۲+۵ \Rightarrow -\frac{۴}{a}=(x-h)^۲ \Rightarrow \pm\sqrt{-\frac{۴}{a}}=x-h$$

$$\Rightarrow x=h\pm\sqrt{-\frac{۴}{a}} \Rightarrow x_B=h-\sqrt{-\frac{۴}{a}},\ x_C=h+\sqrt{-\frac{۴}{a}}$$

$$\Rightarrow BC=(h+\sqrt{-\frac{۴}{a}})-(h-\sqrt{-\frac{۴}{a}})=۲\sqrt{-\frac{۴}{a}} \xrightarrow{BC=۴\ (\text{گام دوم})} ۲\sqrt{-\frac{۴}{a}}=۴ \Rightarrow -\frac{۴}{a}=۴ \Rightarrow a=-۱$$

**گام چهارم:** حال برای مشخص‌کردن صفرهای تابع $f(x)=-(x-h)^۲+۵$ داریم:

$$f(x)=-(x-h)^۲+۵ \Rightarrow -(x-h)^۲+۵=۰ \Rightarrow (x-h)^۲=۵ \Rightarrow x-h=\pm\sqrt{۵} \Rightarrow x=h\pm\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف}=|(h+\sqrt{۵})-(h-\sqrt{۵})|=۲\sqrt{۵}$$

**تیزبازی** تابع $f(x)=۵-x^۲$ را در نظر بگیرید. تمام شرط‌های مسئله را دارد. اختلاف صفرهای این تابع $۲\sqrt{۵}$ است.

**۱۷** معادلهٔ $\frac{۱}{x^۲-۴x+۴}+\frac{۱}{x^۲-۴x+۳}=\frac{۷}{۱۲}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

---

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**Hint** یه عبارت مشترک تو مخرج‌ها پیدا کن و اسمش رو بذار $t$، این‌جوری معادله‌ات خیلی ساده‌تر می‌شه و به یه معادلهٔ درجه‌دو برحسب $t$ می‌رسی.

**درس Box**

**روش حل معادله‌های گویا**

هدف اصلی در حل معادلات گویا، حذف مخرج‌ها و تبدیل معادله به یک معادلهٔ چندجمله‌ای ساده (معمولاً به فرم $P(x)=۰$) است.

**مراحل ساده‌سازی معادله:** برای ساده‌سازی می‌توان از یکی از روش‌های زیر استفاده کرد:

۱) ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج‌ها و ساده‌کردن.

۲) استفاده از طرفین‌وسطین (در حالتی‌که دو طرف تساوی یک کسر باشد) و ساده‌کردن.

۳) گرفتن مخرج‌مشترک و ساده‌سازی.

**مهم:** بررسی جواب‌های قابل قبول: جوابی برای معادلهٔ گویا قابل قبول است که هیچ‌کدام از مخرج‌های موجود در معادلهٔ اصلی را صفر نکند. بهترین راه برای این کار، تعیین دامنهٔ عبارت‌های گویا در ابتدای حل مسئله است. جواب‌های نهایی که در این دامنه قرار ندارند، باید حذف شوند.

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** با تغییر متغیر $x^۲-۴x+۳=t$ معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{t+۱}=\frac{۷}{۱۲} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک گیری}} \frac{t+۱+t}{t^۲+t}=\frac{۷}{۱۲} \Rightarrow \frac{۲t+۱}{t^۲+t}=\frac{۷}{۱۲}$$

$$\xrightarrow[t\neq ۰,-۱]{\text{طرفین وسطین}} ۲۴t+۱۲=۷t^۲+۷t \Rightarrow ۷t^۲-۱۷t-۱۲=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=(-۱۷)^۲-۴(۷)(-۱۲)=۶۲۵=۲۵^۲} t=\frac{۱۷\pm\sqrt{۶۲۵}}{۱۴} \Rightarrow t=۳, t=-\frac{۴}{۷}$$

**گام دوم:** با جای‌گذاری مقادیر $t$ داریم:

$$x^۲-۴x+۳=۳ \Rightarrow x^۲-۴x=۰ \Rightarrow x(x-۴)=۰ \Rightarrow x=۰, x=۴$$

$$x^۲-۴x+۳=-\frac{۴}{۷} \Rightarrow x^۲-۴x+\frac{۲۵}{۷}=۰ \xrightarrow{\times ۷} \xrightarrow{\Delta=۸۴} x=\frac{۲۸\pm\sqrt{۸۴}}{۱۴} \Rightarrow x=\frac{۱۴\pm\sqrt{۲۱}}{۷}$$

هیچ‌کدام از این عدد مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند، بنابراین معادلهٔ صورت سؤال، ۴ جواب دارد.

**۱۸** **برای طراحی قطعه‌ای، کارگر اول نسبت به کارگر دوم ۶ دقیقه وقت کم‌تری لازم دارد. اگر در ۷ ساعت، کارگر اول ۸ قطعه بیشتر از کارگر دوم طراحی کند، مجموع تعداد قطعاتی که آن‌ها در ۷ ساعت طراحی می‌کنند، کدام است؟**

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۰ ۴) ۴۸

---

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**Hint**

متغیرهای مسئله رو تعریف کن (مثلاً زمان ساخت هر قطعه یا تعداد قطعه). بعد رابطه‌هایی که سؤال داده رو به زبان ریاضی بنویس تا به یه معادلهٔ گویا برسی.

**درس Box**

**حل مسائل کاربردی با معادلات گویا**

**راهبرد کلی حل مسئله**

برای حل این‌گونه مسائل، بهتر است مراحل زیر را دنبال کنید:

۱) **درک مسئله:** مسئله را به دقت بخوانید تا اطلاعات داده‌شده و خواستهٔ مسئله مشخص شود.

۲) **تعریف متغیر:** کمیت مجهول در مسئله را با یک متغیر (مانند $x$) نام‌گذاری کنید.

۳) **ساختن معادله:** با استفاده از روابط و فرمول‌های شناخته‌شده، یک معادلهٔ گویا براساس اطلاعات مسئله بنویسید.

۴) **حل معادله:** معادلهٔ گویای به‌دست‌آمده را حل کنید.

۵) **بررسی جواب:** جواب‌های غیرمنطقی (مانند زمان یا سرعت منفی) را حذف کرده و مطمئن شوید جواب با شرایط مسئله سازگار است.

**نوع اول: مسائل کار و زمان**

**مفهوم کلیدی:** نرخ کار، اگر فردی کاری را در $t$ ساعت انجام دهد، نرخ کار او برابر با $\frac{۱}{t}$ (بخشی از کار در ساعت) است.

**مثال** علی یک کار را به تنهایی در ۶ ساعت و حسن همان کار را در ۳ ساعت انجام می‌دهد. اگر هر دو با هم کار کنند، کار در چه زمانی تمام می‌شود؟

**متغیر:** زمان لازم برای انجام کار گروهی را $x$ در نظر می‌گیریم.

**معادله:** (نرخ کار علی) + (نرخ کار حسن) = (نرخ کار گروهی) $\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{x}$

**حل:** با ضرب طرفین در $۶x$ داریم:

$$x+۲x=۶ \Rightarrow ۳x=۶ \Rightarrow x=۲$$

**پاسخ:** کار گروهی در ۲ ساعت تمام می‌شود.

**نوع دوم: مسائل سرعت، مسافت و زمان**

**مفهوم کلیدی:** استفاده از رابطهٔ $t=\frac{d}{v}$ (زمان = مسافت / سرعت).

**مثال** مسافت بین دو شهر ۴۰۰ کیلومتر است. خودرویی این مسیر را با سرعت ثابت $v$ طی می‌کند. اگر سرعت خود را ۲۰ کیلومتر بر ساعت افزایش دهد، ۱ ساعت زودتر به مقصد می‌رسد. سرعت اولیهٔ خودرو چه‌قدر بوده است؟

**متغیر:** سرعت اولیهٔ خودرو $v$ است.

**معادله:** (زمان اولیه) − (زمان ثانویه) = ۱

$$\Rightarrow \frac{۴۰۰}{v}-\frac{۴۰۰}{v+۲۰}=۱$$

**حل:** با ضرب طرفین در $v(v+۲۰)$ داریم:

$$۴۰۰(v+۲۰)-۴۰۰v=v(v+۲۰) \Rightarrow ۸۰۰۰=v^۲+۲۰v$$

با مرتب‌کردن معادلهٔ درجه‌دوم $v^۲+۲۰v-۸۰۰۰=۰$ و حل آن، به جواب‌های $v=۸۰$ و $v=-۱۰۰$ می‌رسیم.

پاسخ: چون سرعت منفی قابل قبول نیست، سرعت اولیهٔ خودرو ۸۰ کیلومتر بر ساعت بوده است.

**نوع سوم: مسائل غلظت و مخلوط**

**مفهوم کلیدی:** غلظت $=\frac{\text{مقدار ماده خالص}}{\text{حجم کل محلول}}$

**مثال** یک ظرف حاوی ۱۰ لیتر محلول آب و نمک با غلظت ۲۰ است. چه‌قدر آب خالص $(x)$ باید به آن اضافه کنیم تا غلظت به ۱۰ کاهش یابد؟

مقدار نمک (ثابت است): $۰/۲۰\times۱۰=۲$ لیتر.

معادله: (غلظت جدید) $=\frac{۲}{۱۰+x}=۰/۱۰ \Rightarrow \frac{\text{مقدار نمک}}{\text{حجم جدید}}$

حل:

$$۰/۱(۱۰+x)=۲ \Rightarrow ۱+۰/۱x=۲ \Rightarrow ۰/۱x=۱ \Rightarrow x=۱۰$$

پاسخ: باید ۱۰ لیتر آب خالص اضافه شود.

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** ابتدا روابط موجود در سؤال را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

رابطهٔ زمان:

$$t_۱=t_۲-۶$$

رابطهٔ تعداد:

$$n_۱=n_۲+۸$$

رابطهٔ اصلی کار هم‌زمان:

$$n_۱=\frac{۴۲۰}{t_۱} \Rightarrow t_۱=\frac{۴۲۰}{n_۱} \xrightarrow{n_۱=n_۲+۸} t_۱=\frac{۴۲۰}{n_۲+۸}$$

$$n_۲=\frac{۴۲۰}{t_۲} \Rightarrow t_۲=\frac{۴۲۰}{n_۲}$$

دقت کنید که ۴۲۰ مدت‌زمان ۷ ساعت بر حسب دقیقه است.

**گام دوم:** حال با جای‌گذاری مقادیر $t_۱$ و $t_۲$ در رابطهٔ زمان، معادلهٔ گویای به‌دست‌آمده را حل می‌کنیم:

$$t_۲-t_۱=۶ \Rightarrow \frac{۴۲۰}{n_۲}-\frac{۴۲۰}{n_۲+۸}=۶ \Rightarrow ۴۲۰\left(\frac{۱}{n_۲}-\frac{۱}{n_۲+۸}\right)=۶ \Rightarrow \frac{۸}{n_۲^۲+۸n_۲}=\frac{۶}{۴۲۰} \Rightarrow \frac{۸}{n_۲^۲+۸n_۲}=\frac{۱}{۷۰}$$

$$\Rightarrow n_۲^۲+۸n_۲-۵۶۰=۰ \Rightarrow (n_۲-۲۰)(n_۲+۲۸)=۰ \xrightarrow{n_۲>۰} n_۲=۲۰ \xrightarrow{n_۱=n_۲+۸} n_۱=۲۸$$

**گام سوم:** مجموع تعداد قطعات طراحی‌شده در ۷ ساعت توسط ۲ کارگر برابر است با:

$$n_۱+n_۲=۲۸+۲۰=۴۸$$

**۱۹** معادلهٔ $x+\sqrt{۴-x\sqrt{x^۲+۴}}=۲$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**Hint**

برای حذف رادیکال، دو طرف معادله رو به توان ۲ برسون. فقط حواست باشه که آخر سر جواب‌های به‌دست‌اومده رو توی معادلهٔ اصلی چک کنی.

**درس Box**

**روش حل معادله‌های گنگ (رادیکالی)**

روش اصلی: توان‌رسانی و بررسی جواب‌ها

برای حل معادلات گنگ، معمولاً با رساندن عبارت به توان، رادیکال را حذف کرده و معادله را به یک معادلهٔ گویا تبدیل می‌کنیم.

**مراحل حل:**

۱) **جداسازی رادیکال:** سعی می‌کنیم یک عبارت رادیکالی را در یک طرف تساوی تنها کنیم.

۲) **توان‌رسانی:** دو طرف تساوی را به توانی متناسب با فرجهٔ رادیکال می‌رسانیم (مثلاً برای جذر، به توان ۲) تا رادیکال حذف شود.

۳) **حل معادلهٔ جدید:** معادلهٔ جبری حاصل‌شده را حل می‌کنیم.

۴) **بررسی جواب‌ها (مرحلهٔ حیاتی):** چون عمل توان‌رسانی ممکن است جواب‌های غیر قابل قبول (جواب خارجی) ایجاد کند، باید تمام جواب‌های به‌دست‌آمده را در معادلهٔ اصلی جای‌گذاری کنیم تا از درستی آن‌ها مطمئن شویم.

**روش کمکی: تعیین دامنهٔ معادله**

گاهی می‌توان قبل از حل کامل معادله، با تعیین دامنه، جواب‌های غیر قابل قبول را حذف کرد. دامنهٔ یک معادلهٔ گنگ، اشتراک دامنهٔ تمام عبارت‌های رادیکالی آن است (عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد).

**مثال** جواب معادلهٔ $\sqrt{x-۳}+\sqrt{۳-x}=۰$ را پیدا کنید.

**تعیین دامنه:** برای تعریف‌شدن رادیکال‌ها باید هر دو عبارت زیر رادیکال نامنفی باشند:

$$x-۳\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۳$$

$$۳-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۳$$

اشتراک این دو شرط ($x\geq ۳$ و $x\leq ۳$) تنها عدد $x=۳$ است؛ بنابراین، دامنهٔ معادله فقط شامل یک عضو است: $D=\{۳\}$.

**نتیجه‌گیری:** این یعنی اگر معادله جوابی داشته باشد، آن جواب حتماً باید $x=۳$ باشد. حالا این تنها جواب ممکن را در معادلهٔ اصلی امتحان می‌کنیم:

$$\sqrt{۳-۳}+\sqrt{۳-۳}=\sqrt{۰}+\sqrt{۰}=۰$$

چون تساوی برقرار است، $x=۳$ تنها جواب معادله است. در این حالت، تعیین دامنه به تنهایی برای حل مسئله کافی بود.

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم و طرفین آن را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{۴-x\sqrt{x^۲+۴}}=۲-x \xrightarrow{x\leq ۲} ۴-x\sqrt{x^۲+۴}=۴-۴x+x^۲ \Rightarrow ۴x-x^۲=x\sqrt{x^۲+۴}$$

$$\xrightarrow{\text{توان }۲} ۱۶x^۲-۸x^۳+x^۴=x^۴+۴x^۲$$

**گام دوم:** معادلهٔ اخیر به‌دست‌آمده را حل کرده و جواب‌های آن را در معادلهٔ اصلی چک می‌کنیم:

$$۸x^۳-۱۲x^۲=۰ \Rightarrow ۴x^۲(۲x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \checkmark \\ x=\frac{۳}{۲} \checkmark \end{cases}$$

بنابراین معادله، ۲ جواب حقیقی دارد.

**۲۰** مجموع جواب‌های معادلهٔ $x^۲+\sqrt[۳]{x^۴-x^۲}=۲x+۱$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-۱$ ۳) ۲ ۴) $-۲$

---

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**Hint** معادله رو یه کم جابه‌جا کن و عبارت $\frac{۱}{x}$ رو بیار سمت چپ. یه عبارت تکراری می‌بینی که می‌تونی با تغییر متغیر، معادله رو ساده کنی.

**پاسخ خیلی تشریحی** **گام اول:** با توجه به این‌که $x=۰$ در معادله صدق نمی‌کند، طرفین معادله را بر $x$ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{x^۲}{x}+\frac{\sqrt[۳]{x^۴-x^۲}}{x}=\frac{۲x+۱}{x} \Rightarrow x+\sqrt[۳]{\frac{x^۴-x^۲}{x^۳}}=۲+\frac{۱}{x} \Rightarrow x+\sqrt[۳]{x-\frac{۱}{x}}=۲+\frac{۱}{x}$$

$$\Rightarrow x-\frac{۱}{x}+\sqrt[۳]{x-\frac{۱}{x}}-۲=۰$$

**گام دوم:** حالا با تغییر متغیر $t=\sqrt[۳]{x-\frac{۱}{x}}$ معادله را بازنویسی و سپس آن را حل می‌کنیم:

$t^۳+t-۲=۰ \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}}$ $t=۱$ یک جواب معادله است.

$$\Rightarrow (t-۱)(t^۲+t+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱ \checkmark \\ t^۲+t+۲=۰ \xrightarrow{\Delta<۰} \times \end{cases}$$

**گام سوم:** با جای‌گذاری مقدار $t$، مقدار $x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sqrt[۳]{x-\frac{۱}{x}}=۱ \Rightarrow x-\frac{۱}{x}=۱ \Rightarrow x^۲-x-۱=۰ \xrightarrow{\Delta>۰} x_۱+x_۲=S=۱$$

**۱** نسبت ریشهٔ پنجم به ریشهٔ سوم عدد ۹ برابر $۳^{a}$ است. اختلاف ریشه‌های دوم عدد $۴+a^{-۱}$ کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

---

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**درس Box**

- ریشهٔ nام عدد x را عدد y می‌نامیم به طوری که تساوی $y^{n}=x$ برقرار باشد. در این تساوی نکاتی نهفته است:

۱) همهٔ اعداد حقیقی ریشهٔ مرتبهٔ فرد دارند که منحصربه‌فرد است.

۲) فقط اعداد مثبت هستند که ریشهٔ مرتبهٔ زوج دارند؛ هر عدد مثبت، دو ریشهٔ مرتبهٔ زوج دارد که قرینهٔ هم هستند و این ریشه‌ها $\pm\sqrt[۲k]{x}$ هستند.

- توان گویا: اگر a مثبت باشد، عدد $a^{\frac{m}{n}}$ معادل رابطهٔ $\sqrt[n]{a^{m}}$ است.

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** ریشه‌های سوم و پنجم عدد ۹ را می‌نویسیم:

ریشهٔ سوم ۹: $\sqrt[۳]{۹}=\sqrt[۳]{۳^{۲}}=۳^{\frac{۲}{۳}}$

ریشهٔ پنجم ۹: $\sqrt[۵]{۹}=\sqrt[۵]{۳^{۲}}=۳^{\frac{۲}{۵}}$

حالا نسبت این دو عدد را طبق فرض برابر $۳^{a}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{۳^{\frac{۲}{۵}}}{۳^{\frac{۲}{۳}}}=۳^{\frac{۲}{۵}-\frac{۲}{۳}}=۳^{\frac{-۴}{۱۵}}=۳^{a} \Rightarrow a=-\frac{۴}{۱۵}$$

**گام دوم:** حالا عدد $۴+a^{-۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$۴+a^{-۱}=۴+(-\frac{۱۵}{۴})=\frac{۱}{۴}$$

ریشه‌های دوم عدد $\frac{۱}{۴}$، اعداد $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$ هستند که اختلاف آن‌ها برابر $\frac{۱}{۲}-(-\frac{۱}{۲})=۱$ است.

**۲** اگر $x^۴+۲x^۲+\frac{۲۵}{(x^۲+۱)^۲}=۹۰$ باشد، حاصل $x^۲+۲-\frac{۵}{x^۲+۱}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**درس Box**

**اتحادهای جبری:**

اتحاد مربع دوجمله‌ای: $(a\pm b)^۲=a^۲\pm ۲ab+b^۲$

اتحاد مزدوج: $(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$

اتحاد جمله‌مشترک: $(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$

اتحاد مکعب دوجمله‌ای: $(a\pm b)^۳=a^۳\pm ۳a^۲b+۳ab^۲\pm b^۳$

اتحاد چاق و لاغر: $(a\pm b)(a^۲\mp ab+b^۲)=a^۳\pm b^۳$

**پاسخ خیلی تشریحی ✔**

**گام اول:** مربع عبارت $x^۲+۱$ عبارت $x^۴+۲x^۲+۱$ است، پس اگر به طرفین تساوی مفروض سؤال، عدد ۱ اضافه کنیم، داریم:

$$(x^۲+۱)^۲+(\frac{۵}{x^۲+۱})^۲=۹۱$$

**گام دوم:** با توجه به این‌که حاصل‌ضرب $x^۲+۱$ و $\frac{۵}{x^۲+۱}$ برابر عدد ۵ است، اگر از طرفین تساوی بالا ۲ برابر ۵، یعنی ۱۰ را کم کنیم، سمت چپ تساوی مربع عبارت $x^۲+۱-\frac{۵}{x^۲+۱}$ می‌شود:

$$\Rightarrow (x^۲+۱)^۲-۱۰+(\frac{۵}{x^۲+۱})^۲=۸۱$$

$$\Rightarrow (x^۲+۱-\frac{۵}{x^۲+۱})^۲=۸۱ \Rightarrow x^۲+۱-\frac{۵}{x^۲+۱}=\pm ۹ \quad (*)$$

**توجه:** دقت کنید که عبارت مطلوب سؤال، ما را وادار کرد که عدد ۱۰ را کم کنیم تا $-۲ab$ در اتحاد مربع دوجمله‌ای ایجاد شود.

**گام سوم:** حالا برای این‌که عبارت مطلوب سؤال را بسازیم، کافی است عدد ۱ را به طرفین تساوی (*) اضافه کنیم:

$$\Rightarrow x^۲+۲-\frac{۵}{x^۲+۱}=-۸ \text{ یا } ۱۰$$

**کنکور**

اگر $x^۲+\frac{۱۰}{x^۲+۱}=۹$ باشد، مقدار $(x^۲+۱)^۲+\frac{۱۰۰}{(x^۲+۱)^۲}$ کدام است؟ *(سؤال ۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)*

۱) ۹۸ ۲) ۹۰ ۳) ۸۸ ۴) ۸۰

**۳** حاصل عبارت $\sqrt{\sqrt{۵}+۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۲}$ چند برابر جذر جواب بزرگ‌تر معادلهٔ $x^۲ = x+۱$ است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) ۱
۴) ۲

**مشاوره** در محاسبه یا ساده‌سازی عبارت‌های رادیکالی که دو رادیکال با عبارت‌های مزدوج جمع شده‌اند، بهترین کار، توان‌رسانی و سپس جذرگرفتن است.

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** ابتدا ساده‌شدهٔ عبارت داده‌شده را طبق مشاورهٔ سؤال به دست می‌آوریم:

$$A=\sqrt{\sqrt{۵}+۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۲} \Rightarrow A^۲=\sqrt{۵}+۲+\sqrt{۵}-۲+۲\sqrt{(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲)}$$

$$\Rightarrow A^۲=۲\sqrt{۵}+۲\sqrt{۱}=۲\sqrt{۵}+۲$$

$$\xrightarrow{A>۰} A=\sqrt{۲\sqrt{۵}+۲}=\sqrt{۲}\sqrt{\sqrt{۵}+۱}$$

**گام دوم:** حالا جواب بزرگ‌تر معادله را به دست می‌آوریم:

$$x^۲-x-۱=۰ \xrightarrow{\Delta=۱+۴=۵} x=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲} \xrightarrow{\text{جواب بزرگ‌تر}} x_۰=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

جذر این عدد برابر است با:

$$\sqrt{x_۰}=\sqrt{\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}}=\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۵}}}{\sqrt{۲}}$$

**گام سوم:** خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{A}{\sqrt{x_۰}}=\frac{\sqrt{۲}\sqrt{\sqrt{۵}+۱}}{\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۵}}}{\sqrt{۲}}}=۲$$

**۴** اگر $۲a+b^۲+۲ac=۲۳$، $۲b+c^۲+۲ab=۱۸$ و $۲c+a^۲+۲bc=۲۲$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

---

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**نکته** **اتحاد مربع سه‌جمله‌ای:** $(a+b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲(ab+ac+bc)$

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** طرفین تساوی‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\Rightarrow ۲a+b^۲+۲ac+۲b+c^۲+۲ab+۲c+a^۲+۲bc=۶۳$$

$$\Rightarrow ۲(a+b+c)+a^۲+b^۲+c^۲+۲(ab+ac+bc)=۶۳$$

طبق نکته، عبارت $a^۲+b^۲+c^۲+۲(ab+ac+bc)$ برابر $(a+b+c)^۲$ است:

$$\Rightarrow ۲(a+b+c)+(a+b+c)^۲=۶۳$$

**گام دوم:** با تغییر متغیر $t=a+b+c$ معادلهٔ بالا را حل می‌کنیم:

$$t^۲+۲t=۶۳$$

و اگر به طرفین تساوی بالا عدد ۱ را اضافه کنیم، داریم:

$$t^۲+۲t+۱=۶۴ \Rightarrow (t+۱)^۲=۸^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t+۱=۸ \Rightarrow t=۷ \\ t+۱=-۸ \Rightarrow t=-۹ \end{cases}$$

سنجش کلاد

**۵** اگر $x=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$، $y=۱-\sqrt{۳}$ و $z=\sqrt{۲}-۱$ باشد، حاصل عبارت $\frac{xy+yz+xz}{x^۲+y^۲+z^۲}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-۲$ ۴) $۲$

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**Hint** حاصل $x+y+z$ برابر صفر شده، عبارت‌های صورت و مخرج هم توی اتحاد مربع سه‌جمله‌ای دیده می‌شه.

**پاسخ خیلی تشریحی** با دقت در اعداد $x$، $y$ و $z$ می‌بینیم که مجموع آن‌ها برابر صفر است:

$$x+y+z=۰$$

حالا با استفاده از اتحاد مربع سه‌جمله‌ای داریم:

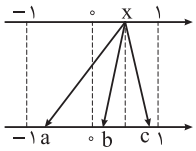
$$(x+y+z)^۲=x^۲+y^۲+z^۲+۲(xy+xz+yz)$$

$$\xrightarrow{x+y+z=۰} x^۲+y^۲+z^۲=-۲(xy+xz+yz)$$

$$\Rightarrow \frac{xy+xz+yz}{x^۲+y^۲+z^۲}=-\frac{۱}{۲}$$

سنجش کلاد

**۶** در شکل زیر، عدد x از محور بالا به مربع و ریشه‌های دوم و مربع خود روی محور پایین وصل شده است. اگر $\frac{b}{ac^2}=-\frac{1}{8}$ باشد، مقدار $\sqrt[3]{x}$ کدام است؟




۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۲
۳) $\frac{1}{4}$
۴) ۴

**مشاوره** مقایسهٔ ریشه‌های یک عدد از آن دسته مباحثی است که هم سؤال مستقیم دارد و هم این‌که قابلیت این را دارد که با سؤالات دیگر ترکیب شود؛ پس به آن مسلط باشید.

**Hint** با توجه به این‌که x بین صفر و یک است، a، b و c را برحسب x بنویسید و در رابطهٔ داده‌شده جای‌گذاری کنید تا x به دست آید.

**درس Box**

**ریشهٔ n اُم:**

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، می‌گوییم b ریشهٔ n اُم a است، هرگاه:

$$b^n=a\ (n\in\mathbb{N},\ n\geq 2)$$

**نکته** اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند و اعداد مثبت دو ریشهٔ زوج دارند که قرینهٔ یکدیگرند.

**مقایسهٔ ریشه‌ها:**

اگر $a>1$ (یا $-1<a<0$) هر چه ریشه بزرگ‌تر باشد، حاصل کوچک‌تر خواهد بود.

$$a>1 \Rightarrow \sqrt{a}>\sqrt[3]{a}>\sqrt[4]{a}>\dots$$

اگر $0<a<1$ (یا $a<-1$)، هر چه ریشه کوچک‌تر باشد، حاصل بزرگ‌تر خواهد بود.

$$0<a<1 \Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt[3]{a}<\sqrt[4]{a}<\dots$$

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** x بین صفر و یک است و مربعش از خودش کوچک‌تر است. از طرفی، مربع x نمی‌تواند منفی باشد، در نتیجه مربع x برابر b است و داریم:

$$x^2=b \quad (1)$$

**گام دوم:** می‌دانیم که ریشه‌های دوم x به صورت $\sqrt{x}$ و $-\sqrt{x}$ هستند؛ پس a که منفی است برابر $-\sqrt{x}$ و c که مثبت است برابر $\sqrt{x}$ است:

$$\sqrt{x}=c\ ,\ -\sqrt{x}=a \qquad (2)$$

**گام سوم:** رابطه‌های (۱) و (۲) را در تساوی داده‌شده در سؤال جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{b}{ac^2}=-\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{x^2}{-\sqrt{x}(\sqrt{x})^2}=-\frac{1}{8} \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{8} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x=\frac{1}{64}$$

**گام چهارم:** خواستهٔ سؤال $\sqrt[3]{x}$ است که برابر می‌شود با:

$$\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{4}$$

**۷** اگر $A=\frac{\sqrt{۸\sqrt[۳]{A}}\times ۲^{-\frac{۱}{۲}}}{\sqrt[۳]{۴\sqrt{۲}}\times ۸^{-\frac{۲}{۳}}}$ باشد، مقدار $A^{۵}$ کدام است؟

۱) $۲^{۹}$ ۲) $۲^{۱۰}$ ۳) $۲^{۱۲}$ ۴) $۲^{۱۳}$

**مشاوره** در نگاه اول شاید یک سؤال سخت و طولانی به نظر آید، در حالی که از سؤالات آسان آزمون بوده است.

**Hint** به کمک قوانین رادیکال و توان‌های گویا، همهٔ پایه‌ها را برحسب A و ۲ بنویسید و سپس خواستهٔ سؤال را به دست آورید.

**درس Box**

**قوانین رادیکال‌ها:**

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ | $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ | $(b\neq ۰)$ |
| $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ | $\sqrt[n]{a^{n}}=\begin{cases}\lvert a\rvert & n\text{ زوج}\\ a & n\text{ فرد}\end{cases}$ | |

توجه کنید که در تمام عبارت‌های بالا اگر n زوج باشد، زیر رادیکال باید نامنفی شود.

**توان‌های گویا:**

توان‌های گویا برای پایه‌های مثبت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}\ (a>۰, m,n\in\mathbb{Z})$$

**قوانین توان:**

| | | |
|---|---|---|
| $a^{۰}=۱$ | $۱^{n}=۱$ | $۰^{n}=۰$ |
| $a^{-۱}=\frac{۱}{a}$ | $a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$ | $\frac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$ |
| $(a^{m})^{n}=a^{mn}$ | $(ab)^{n}=a^{n}b^{n}$ | $(\frac{a}{b})^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}$ |

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** با توجه به خواص رادیکال و توان‌های گویا، A را ساده‌تر می‌کنیم:

$$A=\frac{\overbrace{\sqrt{۸}\times\sqrt{\sqrt[۳]{A}}}^{\sqrt{۸\sqrt[۳]{A}}}\times ۲^{-\frac{۱}{۲}}}{\underbrace{\sqrt[۳]{۴\sqrt{۲}}}_{\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۲}}}\times ۸^{-\frac{۲}{۳}}}\Rightarrow A=\frac{\sqrt{۸}\times\sqrt[۶]{A}\times ۲^{-\frac{۱}{۲}}}{\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۶]{۲}\times ۸^{-\frac{۲}{۳}}}\Rightarrow A=\frac{\sqrt{۲^{۳}}\times\sqrt[۶]{A}\times ۲^{-\frac{۱}{۲}}}{\sqrt[۳]{۲^{۲}}\times\sqrt[۶]{۲}\times(۲^{۳})^{-\frac{۲}{۳}}}\Rightarrow A=\frac{۲^{\frac{۳}{۲}}\times A^{\frac{۱}{۶}}\times ۲^{-\frac{۱}{۲}}}{۲^{\frac{۲}{۳}}\times ۲^{\frac{۱}{۶}}\times ۲^{-۲}}$$

$$\Rightarrow A=\frac{۲^{۱}\times A^{\frac{۱}{۶}}}{۲^{-\frac{۷}{۶}}}$$

**گام دوم:** در تساوی به‌دست‌آمده $A^{\frac{۱}{۶}}$ را به مخرج سمت چپ می‌بریم:

$$A=\frac{۲^{۱}\times A^{\frac{۱}{۶}}}{۲^{-\frac{۷}{۶}}}\Rightarrow\frac{A}{A^{\frac{۱}{۶}}}=\frac{۲}{۲^{-\frac{۷}{۶}}}\Rightarrow A^{۱-\frac{۱}{۶}}=۲^{۱-(-\frac{۷}{۶})}\Rightarrow A^{\frac{۵}{۶}}=۲^{\frac{۱۳}{۶}}\quad(*)$$

**گام سوم:** دو طرف رابطهٔ (*) را به توان ۶ می‌رسانیم تا خواستهٔ سؤال به دست آید:

$$A^{\frac{۵}{۶}}=۲^{\frac{۱۳}{۶}}\xrightarrow{\text{دو طرف به توان }۶}(A^{\frac{۵}{۶}})^{۶}=(۲^{\frac{۱۳}{۶}})^{۶}\Rightarrow A^{۵}=۲^{۱۳}$$

پس گزینهٔ (۴) پاسخ سؤال است.

**۸** اگر $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-۳}=۴$ و $a+\sqrt{x-a}-\sqrt{x-۳}=۴$ باشد، مقدار $a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳}$

**مشاوره** این سؤال مشابه یکی از تمرینات کتاب درسی دهم است که شبیه آن در کنکور تجربی ۱۴۰۳ هم طرح شده است.

**Hint** در تساوی دوم، $a$ را به سمت راست ببرید و سپس دو طرف تساوی‌ها را به کمک اتحاد مزدوج در هم ضرب کنید.

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** تساوی $a+\sqrt{x-a}-\sqrt{x-۳}=۴$ را به صورت $\sqrt{x-a}-\sqrt{x-۳}=۴-a$ می‌نویسیم، حال این تساوی را به همراه تساوی دیگری که داده‌شده، زیر هم می‌نویسیم و دو طرف آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix}\sqrt{x-a}+\sqrt{x-۳}=۴\\ \sqrt{x-a}-\sqrt{x-۳}=۴-a\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{دو طرف ضرب در یکدیگر}} (\sqrt{x-a}+\sqrt{x-۳})(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-۳})=۱۶-۴a$$

**گام دوم:** در سمت چپ تساوی به‌دست‌آمده، همه چیز برای استفاده از اتحاد مزدوج آماده است:

$$\overbrace{(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-۳})(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-۳})}^{\text{اتحاد مزدوج}}=۱۶-۴a$$

$$\Rightarrow (x-a-(x-۳))=۱۶-۴a \Rightarrow x-a-x+۳=۱۶-۴a \Rightarrow ۳a=۱۳ \Rightarrow a=\frac{۱۳}{۳}$$

**۹** اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی بزرگ‌تر از یک و $a^۳ = ۲ + b^۳$ باشد، حاصل $\frac{a^۲ + a + ۱}{b^۲ - b + ۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱ + b}{۱ - a}$

۲) $\frac{b + ۱}{a - ۱}$

۳) $-\frac{a}{b}$

۴) $\frac{b}{a}$

**مشاوره** اتحادهای جبری رکن جدانشدنی ریاضیات کنکور است، حتماً بر آن‌ها مسلط باشید؛ چراکه بدون دانستن آن‌ها، در ریاضی راه به جایی نمی‌برید.

**Hint** در تساوی داده‌شده به جای ۲، بنویسید $۱ + ۱$ و از اتحاد چاق و لاغر برای رسیدن به خواستهٔ سؤال استفاده کنید، توجه کنید که صورت و مخرج داده‌شده، هر دو قسمت چاقِ یک اتحاد چاق و لاغر هستند.

**نکته** اگر دو طرف یک تساوی چند عامل در یکدیگر ضرب شده بودند، عامل را می‌توانیم جابه‌جا کنیم به این صورت که هر عامل از صورت یکی به مخرج دیگری و برعکس می‌تواند برود.

$$ab = cd \Rightarrow b = \frac{cd}{a} \quad \text{یا} \quad \frac{ab}{c} = d$$

**پاسخ خیلی تشریحی** **گام اول:** در رابطهٔ صورت سؤال به جای ۲ می‌نویسیم $۱ + ۱$ و خواهیم داشت:

$$a^۳ = ۲ + b^۳ \Rightarrow a^۳ = ۱ + ۱ + b^۳ \Rightarrow a^۳ - ۱ = b^۳ + ۱$$

**گام دوم:** دو طرف تساوی را با توجه به اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم و خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$a^۳ - ۱ = b^۳ + ۱ \Rightarrow (a-۱)(a^۲ + a + ۱) = (b+۱)(b^۲ - b + ۱) \xrightarrow[\text{خواستهٔ سؤال}]{\text{خاصیت تساوی}} \frac{a^۲ + a + ۱}{b^۲ - b + ۱} = \frac{b + ۱}{a - ۱}$$

همان‌طور که می‌بینید گزینهٔ (۲) صحیح است.

**یه جور دیگه** **گام اول:** هر دو عبارت موجود در صورت و مخرج قسمت چاق، یک اتحاد چاق و لاغر هستند، آن‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$(a-۱)(a^۲ + a + ۱) = a^۳ - ۱ \Rightarrow a^۲ + a + ۱ = \frac{a^۳ - ۱}{a - ۱}$$

$$(b+۱)(b^۲ - b + ۱) = b^۳ + ۱ \Rightarrow b^۲ - b + ۱ = \frac{b^۳ + ۱}{b + ۱}$$

**گام دوم:** عبارت‌های به‌دست‌آمده را در خواستهٔ سؤال جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{a^۲ + a + ۱}{b^۲ - b + ۱} = \frac{\frac{a^۳ - ۱}{a - ۱}}{\frac{b^۳ + ۱}{b + ۱}} = \frac{(a^۳ - ۱)(b + ۱)}{(a - ۱)(b^۳ + ۱)} \quad (*)$$

**گام سوم:** به گفتهٔ سؤال $a^۳ = ۲ + b^۳$، پس به جای $a^۳$، $۲ + b^۳$ را در $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم و خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{(a^۳ - ۱)(b + ۱)}{(a - ۱)(b^۳ + ۱)} = \frac{(۲ + b^۳ - ۱)(b + ۱)}{(a - ۱)(b^۳ + ۱)} = \frac{(b^۳ + ۱)(b + ۱)}{(a - ۱)(b^۳ + ۱)} = \frac{b + ۱}{a - ۱}$$

**۱۰** اگر $A$ و $B$ دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۳ = A\sqrt{۳} - B\sqrt{۲}$، آن‌گاه $\frac{B}{A}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $۲\frac{۳}{۴}$ ۳) $۱\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

**Hint**

عبارت $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۳$ را با کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای ساده کنید و سپس از جملات شامل $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ به طور جداگانه فاکتور بگیرید.

**درس Box**

اتحاد مکعب دوجمله‌ای: اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases}(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳ = a^۳ + b^۳ + ۳ab(a+b)\\(a-b)^۳ = a^۳ + ۳ab^۲ - ۳a^۲b - b^۳ = a^۳ - b^۳ - ۳ab(a-b)\end{cases}$$

**پاسخ خیلی تشریحی ✔**

**گام اول:** عبارت $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۳$ را با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای ساده می‌کنیم:

$$(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۳ = (\sqrt{۳})^۳ - (\sqrt{۲})^۳ - ۳\times\sqrt{۳}\times\sqrt{۲}(\sqrt{۳}-\sqrt{۲}) = ۳\sqrt{۳} - ۲\sqrt{۲} - ۹\sqrt{۲} + ۶\sqrt{۳} = ۹\sqrt{۳} - ۱۱\sqrt{۲}$$

**گام دوم:** مقدار به‌دست‌آمده را در عبارت صورت سؤال جای‌گذاری می‌کنیم و مقادیر $A$ و $B$ را به دست می‌آوریم:

$$۹\sqrt{۳} - ۱۱\sqrt{۲} = A\sqrt{۳} - B\sqrt{۲} \Rightarrow \begin{cases}A = ۹\\B = ۱۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{۱۱}{۹} = ۱\frac{۲}{۹}$$

**۱۱** اختلاف ریشه‌های چهارم عدد $۲۸-۱۶\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}-۲$ ۲) $۲\sqrt{۳}+۲$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۴

**Hint** عدد داده‌شده را به صورت مربع کامل یعنی به فرم $(a-b)^۲$ درآورید و مجدداً تلاش کنید عبارت $(a-b)$ را به فرم مربع کامل بنویسید.

**درس Box** در حالت کلی ریشهٔ nام عدد a، عددی مانند b است که به ازای آن رابطهٔ $b^n = a$ برقرار باشد. ریشهٔ nام برحسب مثبت یا منفی بودن عدد، مطابق جدول زیر است:

| a \ n | n زوج (ریشهٔ زوج) | n فرد (ریشهٔ فرد) |
|---|---|---|
| اعداد مثبت | دو ریشهٔ زوج دارند: $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ | هر عدد دقیقاً یک ریشهٔ فرد دارد $\sqrt[n]{a}$ |
| اعداد منفی | - | |
| صفر | ریشهٔ nام صفر، همواره برابر صفر است. | |

**پاسخ خیلی تشریحی** **گام اول:** فرض کنید $b^۴ = ۲۸-۱۶\sqrt{۳}$. سعی می‌کنیم تا عدد $۲۸-۱۶\sqrt{۳}$ را به صورت مربع کامل بنویسیم:

$$۲۸-۱۶\sqrt{۳} = ۴(۷-۴\sqrt{۳}) = ۴(۴+۳-۴\sqrt{۳}) = ۴(۲^۲+(\sqrt{۳})^۲-۲\times۲\times\sqrt{۳}) = ۲^۲(۲-\sqrt{۳})^۲ = (۴-۲\sqrt{۳})^۲$$

$$\Rightarrow b^۴ = (۴-۲\sqrt{۳})^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} b^۲ = ۴-۲\sqrt{۳}$$

**گام دوم:** این بار سعی می‌کنیم عدد $۴-۲\sqrt{۳}$ را به صورت مربع کامل بنویسیم:

$$۴-۲\sqrt{۳} = ۳+۱-۲\sqrt{۳} = (\sqrt{۳})^۲+۱^۲-۲\times\sqrt{۳}\times۱ = (\sqrt{۳}-۱)^۲$$

$$b^۲ = (\sqrt{۳}-۱)^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} b = \pm(\sqrt{۳}-۱) \Rightarrow \begin{cases} b_۱ = \sqrt{۳}-۱ \\ b_۲ = -(\sqrt{۳}-۱) \end{cases}$$

**گام سوم:** اختلاف ریشه‌های چهارم برابر است با:

$$|b_۱-b_۲| = (\sqrt{۳}-۱)+(\sqrt{۳}-۱) = ۲(\sqrt{۳}-۱) = ۲\sqrt{۳}-۲$$

**۱۲** با فرض $A=\frac{۸+۳\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}+\frac{۳\sqrt{۳}-۸}{۷+۲\sqrt{۳}}$، حاصل $A+\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

**مشاوره** در بسیاری از آزمون‌ها مانند این آزمون، سؤال اول از عبارت‌های جبری و یا قوانین توان‌های گویا و رادیکال‌ها است.

**Hint** $۳\sqrt{۳}$ را بنویسید $(\sqrt{۳})^{۳}$ و سپس به کمک اتحاد چاق و لاغر عبارت‌ها را تجزیه کنید.

**درس Box**

**اتحادهای جبری:**

| | |
|---|---|
| اتحاد مربع دوجمله‌ای | $(a\pm b)^{۲}=a^{۲}\pm ۲ab+b^{۲}$ |
| اتحاد مربع سه‌جمله‌ای | $(a+b+c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲ab+۲ac+۲bc$ |
| اتحاد مزدوج | $(a+b)(a-b)=a^{۲}-b^{۲}$ |
| اتحاد مکعب دوجمله‌ای | $(a\pm b)^{۳}=a^{۳}\pm ۳a^{۲}b+۳b^{۲}a\pm b^{۳}$ |
| اتحاد چاق و لاغر | $a^{۳}\pm b^{۳}=(a\pm b)(a^{۲}\mp ab+b^{۲})$ |

**تجزیهٔ عبارت‌های جبری:** تجزیه به معنی تبدیل یک جمع یا تفریق به یک ضرب است، برای تجزیه از اتحادهای جبری، فاکتورگیری و ... کمک می‌گیریم.

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** عبارت‌های $۸+۳\sqrt{۳}$ و $۳\sqrt{۳}-۸$ را به کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$۸+۳\sqrt{۳}=۲^{۳}+(\sqrt{۳})^{۳}=(۲+\sqrt{۳})(۴-۲\sqrt{۳}+۳)=(۲+\sqrt{۳})(۷-۲\sqrt{۳})$$

$$۳\sqrt{۳}-۸=(\sqrt{۳})^{۳}-۲^{۳}=(\sqrt{۳}-۲)(۳+۲\sqrt{۳}+۴)=(\sqrt{۳}-۲)(۷+۲\sqrt{۳})$$

**گام دوم:** حال عبارت‌های به‌دست‌آمده را در $A$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A=\frac{۸+۳\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}+\frac{۳\sqrt{۳}-۸}{۷+۲\sqrt{۳}}\Rightarrow A=\frac{(۲+\sqrt{۳})(۷-۲\sqrt{۳})}{۲+\sqrt{۳}}+\frac{(\sqrt{۳}-۲)(۷+۲\sqrt{۳})}{۷+۲\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow A=۷-۲\sqrt{۳}+\sqrt{۳}-۲=۵-\sqrt{۳}$$

**گام سوم:** با توجه به این‌که $A$ را به دست آوردیم، خواستهٔ سؤال که $A+\sqrt{۳}$ است را به دست می‌آوریم:

$$A+\sqrt{۳}=۵-\sqrt{۳}+\sqrt{۳}=۵$$

**۱۳** حاصل $\frac{۱/۵}{\sqrt[۳]{۲}+۱}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt[۳]{۴}+۱}{۲}$

۴) ۱

**Hint** مخرج‌ها رو گویا کن.

**پاسخ خیلی تشریحی** **گام اول:** مخرج هر کدام از کسرهایی که داریم را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۸}}=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}$$

$$\frac{۱/۵}{\sqrt[۳]{۲}+۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱}{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{\frac{۳}{۲}(\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱)}{۲+۱}=\frac{۱}{۲}(\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱)$$

**گام دوم:** پس حاصل عبارت مورد نظر برابر می‌شود با:

$$\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۴}-\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt[۳]{۴}+۱}{۲}$$

سنجش کلاد

**۱۴** حاصل عبارت $\left(\frac{۴}{(\sqrt{۵}+۱)(\sqrt[۴]{۵}+۱)(\sqrt[۸]{۵}+۱)(\sqrt[۱۶]{۵}+۱)}+۱\right)^{۴۸}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲۵ ۳) ۱۲۵ ۴) ۶۲۵

**Hint**

صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت $(۱+\sqrt[۱۶]{۵})$ ضرب کنید.

**درس Box**

اگر در مخرج کسری رادیکال وجود داشته باشد، عموماً باید مخرج را گویا کنیم. معمولاً صورت و مخرج کسر را در عبارت مناسبی که مخرج را گویا کند، ضرب می‌کنیم. برای گویاکردن دوجمله‌ای‌هایی به فرم $(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})$ یا $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})$ در صورتی‌که n عددی زوج باشد، صورت و مخرج را در مزدوج این عبارت ضرب می‌کنیم.

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** برای گویاکردن عبارت کسری، ابتدا صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت $(۱+\sqrt[۱۶]{۵})$ ضرب می‌کنیم.

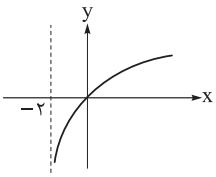
$$\frac{۴(\sqrt[۱۶]{۵}-۱)}{(\sqrt{۵}+۱)(\sqrt[۴]{۵}+۱)(\sqrt[۸]{۵}+۱)\underbrace{(\sqrt[۱۶]{۵}+۱)(\sqrt[۱۶]{۵}-۱)}_{\sqrt[۸]{۵}-۱}}=\frac{۴(\sqrt[۱۶]{۵}-۱)}{(\sqrt{۵}+۱)(\sqrt[۴]{۵}+۱)\underbrace{(\sqrt[۸]{۵}+۱)(\sqrt[۸]{۵}-۱)}_{\sqrt[۴]{۵}-۱}}$$

$$=\frac{۴(\sqrt[۱۶]{۵}-۱)}{(\sqrt{۵}+۱)\underbrace{(\sqrt[۴]{۵}+۱)(\sqrt[۴]{۵}-۱)}_{\sqrt{۵}-۱}}=\frac{۴(\sqrt[۱۶]{۵}-۱)}{(\sqrt{۵}+۱)(\sqrt{۵}-۱)}=\frac{۴(\sqrt[۱۶]{۵}-۱)}{۵-۱}=\sqrt[۱۶]{۵}-۱$$

**گام دوم:** مقدار به‌دست‌آمده از گام اول را در عبارت صورت سؤال جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(\sqrt[۱۶]{۵}-۱+۱)^{۴۸}=(\sqrt[۱۶]{۵})^{۴۸}=۵^{\frac{۴۸}{۱۶}}=۵^{۳}=۱۲۵$$

**۱** شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\log_{۳}(ax+b)$ را نشان می‌دهد. حاصل $[\frac{۱}{۲}f^{-۱}(a+b)]$ کدام است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است.)




۱) ۷

۲) ۶

۳) ۵

۴) ۴

---

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

درس Box

**دامنهٔ تابع لگاریتمی:**

دامنهٔ تابع لگاریتمی $\log_{g(x)} f(x)$ برابر است با اشتراک ۳ نامساوی زیر:

$f(x)>۰$

$g(x)>۰$

$g(x)\neq ۱$

**پاسخ خیلی تشریحی ✔**

**گام اول:** نمودار تابع f از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس:

$$(۰,۰)\in f \xrightarrow{f(۰)=۰} \log_{۳} b=۰ \Rightarrow b=۳^{۰} \Rightarrow b=۱$$

**گام دوم:** دامنهٔ تابع f از روی نمودار، $x>-۲$ است، حال با توجه به ضابطه داریم:

$$f(x)=\log_{۳}(ax+b) \xrightarrow{\text{دامنه}} ax+b>۰ \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} x>-\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{a}=-۲ \xrightarrow{b=۱} -\frac{۱}{a}=-۲ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

پس $f(x)=\log_{۳}(\frac{x}{۲}+۱)$.

**گام سوم:** مقدار $f^{-۱}(a+b)$ که همان $f^{-۱}(\frac{۳}{۲})$ است را m در نظر می‌گیریم:

$$f^{-۱}(\frac{۳}{۲})=m \Rightarrow f(m)=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \log_{۳}(\frac{m}{۲}+۱)=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{m}{۲}+۱=۳^{\frac{۳}{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{۲}=\sqrt{۲۷}-۱ \Rightarrow m=۲\sqrt{۲۷}-۲ \Rightarrow f^{-۱}(\frac{۳}{۲})=۲\sqrt{۲۷}-۲$$

**گام چهارم:** پس خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$[\frac{۱}{۲}f^{-۱}(\frac{۳}{۲})]=[\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۲۷}-۲)]=[\sqrt{۲۷}-۱]=[۴/...]=۴$$

**۲** اگر $f(x)=a+۳^{۱+x}$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ و برد تابع fog بازهٔ $[۲,+\infty)$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-۱$ ۳) ۲ ۴) $-۲$

---

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**Hint** در توابع اکیداً صعودی، کم‌ترین مقدار برد به ازای کم‌ترین مقدار دامنه به دست میاد.

**پاسخ خیلی تشریحی** **گام اول**: ابتدا دامنهٔ تابع fog را براساس تعریف به دست می‌آوریم:

$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=[۰,+\infty)$$

$$\xrightarrow{D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}} D_{fog}=\{x\geq ۰\,|\,\sqrt{x}\in\mathbb{R}\}$$

بنابراین $D_{fog}=[۰,+\infty)$ است.

**گام دوم**: حالا ضابطهٔ تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases}f(x)=a+۳^{۱+x}\\ g(x)=\sqrt{x}\end{cases}\Rightarrow (fog)(x)=f(g(x))=a+۳^{۱+\sqrt{x}}$$

**گام سوم**: تابع g و تابع نمایی f هر دو اکیداً صعودی هستند، پس از آن‌جا که ترکیب دو تابع اکیداً صعودی، اکیداً صعودی است، تابع به‌دست‌آمده، یعنی fog همواره صعودی است، پس کم‌ترین عضو بُرد که ۲ است، به ازای کم‌ترین عضو دامنه که $x=۰$ است به دست می‌آید:

$$(fog)(۰)=۲\ \Rightarrow\ a+۳^{۱+۰}=۲\ \Rightarrow\ a=-۱$$

**۳** اگر $f(x)=\log_2 x$ و $(gof)(x)=2^x+3$، مقدار $g^{-1}(19)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۸

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**Hint** از تغییر متغیر $f(x)=t$ استفاده کن.

**پاسخ خیلی تشریحی** **گام اول:** در تابع $(gof)(x)=2^x+3$، از تغییر متغیر $f(x)=t$ استفاده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{f(x)=t} \log_2 x=t \Rightarrow x=2^t \xrightarrow{g(f(x))=2^x+3} g(t)=2^{2^t}+3 \Rightarrow g(x)=2^{2^x}+3$$

**گام دوم:** حال فرض می‌کنیم که $g^{-1}(19)=m$:

$$g^{-1}(19)=m \Rightarrow g(m)=2^{2^m}+3=19 \Rightarrow 2^{2^m}=16=2^4=2^{2^2} \Rightarrow m=2$$

سنجش کلاد

**۴** اگر $\log_{۳} ۵ = m$، حاصل $\log_{۵} ۲۷ + \log_{۹} ۱۲۵$ برحسب m کدام است؟

۱) $\frac{m^۲ + ۶}{۲m}$

۲) $\frac{m^۲ - ۶}{۲m}$

۳) $\frac{۳m^۲ - ۶}{۲m}$

۴) $\frac{۳m^۲ + ۶}{۲m}$

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**درس Box**

**ویژگی‌های لگاریتم:**

۱) $\log_x ۱ = ۰$

۲) $\log_x a + \log_x b = \log_x ab$

۳) $\log_x a - \log_x b = \log_x \frac{a}{b}$

۴) $\log_{x^n} a^m = \frac{m}{n} \log_x a$

۵) ویژگی تغییر مبنا: $\log_x a = \frac{\log_c a}{\log_c x} \Rightarrow \log_x a = \frac{۱}{\log_a x}$

۶) $a^{\log_c x} = x^{\log_c a}$

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** ابتدا خواستهٔ سؤال را براساس قوانین لگاریتم ساده می‌کنیم:

$$\log_{۹} ۱۲۵ + \log_{۵} ۲۷ = \log_{۳^۲} ۵^۳ + \log_{۵} ۳^۳ = \frac{۳}{۲} \log_{۳} ۵ + ۳ \log_{۵} ۳$$

**گام دوم:** طبق فرض سؤال، $\log_{۳} ۵ = m$، پس $\log_{۵} ۳ = \frac{۱}{m}$، در نتیجه خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$\log_{۹} ۱۲۵ + \log_{۵} ۲۷ = \frac{۳m}{۲} + \frac{۳}{m} = \frac{۳m^۲ + ۶}{۲m}$$

**۵** اگر $\log_{۲} a+\log_{۳} b=\frac{۵}{۶}$ و $\log_{۳} a\times\log_{۲} b=\frac{۱}{۶}$، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن a کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۱۲}$ ۲) $\sqrt[۳]{۶}$ ۳) $\sqrt[۶]{۶۴}$ ۴) $\sqrt[۶]{۳۲}$

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

Hint توی تساوی دوم از تغییر مبنا استفاده کن.

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** فرض می‌کنیم $\log_{۲} a=m$ و $\log_{۳} b=n$، پس:

$$\log_{۲} a+\log_{۳} b=\frac{۵}{۶} \Rightarrow m+n=\frac{۵}{۶}$$

**گام دوم:** با توجه به ویژگی ۳ در درس‌باکس پاسخ قبلی می‌توانیم بنویسیم $\log_{۳} a=\frac{\log_{۲} a}{\log_{۲} ۳}$ و $\log_{۲} b=\frac{\log_{۳} b}{\log_{۳} ۲}$، پس با توجه به تساوی دوم خواهیم داشت:

$$\log_{۳} a\times\log_{۲} b=\frac{\overset{m}{\log_{۲} a}}{\log_{۲} ۳}\times\frac{\overset{n}{\log_{۳} b}}{\log_{۳} ۲}=\frac{۱}{۶} \xrightarrow{\log_{۲} ۳\times\log_{۳} ۲=۱} mn=\frac{۱}{۶}$$

**گام سوم:** پس m و n جواب معادلهٔ $x^{۲}-\frac{۵}{۶}x+\frac{۱}{۶}=۰$ هستند.

$$\Rightarrow ۶x^{۲}-۵x+۱=۰ \xrightarrow{\text{روش روسی}} t^{۲}-۵t+۶=(t-۳)(t-۲)=۰ \Rightarrow t=۲ \text{ یا } ۳ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳} \text{ یا } \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادلهٔ درجه دو}} \begin{cases} m=\frac{۱}{۲} \\ m=\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

**گام چهارم:** پس $m=\log_{۲} a$ یا برابر $\frac{۱}{۲}$ است یا $\frac{۱}{۳}$:

$$\log_{۲} a=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a=۲^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲}$$

$$\log_{۲} a=\frac{۱}{۳} \Rightarrow a=۲^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۲}$$

بنابراین حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای a برابر می‌شود با:

$$۲^{\frac{۱}{۲}}\times۲^{\frac{۱}{۳}}=۲^{\frac{۵}{۶}}=\sqrt[۶]{۲^{۵}}=\sqrt[۶]{۳۲}$$

**۶** اگر $x_1$ و $x_2$ جواب‌های معادلهٔ $\log|2-x|+\log\frac{1}{x^2-4x+4}=3$ باشند، حاصل $\log_{2\sqrt{2}}(x_1+x_2)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{4}{3}$

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

Hint جوری از قوانین لگاریتم استفاده کن که $x^2-4x+4=(2-x)^2$ به دردت بخوره.

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم، معادله را به شکل نهایی زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\log|2-x|+\log\frac{1}{x^2-4x+4}=3 \Rightarrow \log\frac{|2-x|}{x^2-4x+4}=3 \xrightarrow{x^2-4x+4=(2-x)^2} \log\frac{|2-x|}{(2-x)^2}=3$$

$$\xrightarrow{x\neq 2} \log\frac{1}{|2-x|}=3$$

**گام دوم:** حال در معادلهٔ به‌دست‌آمده، به جای ۳، عبارت $\log 1000$ را قرار می‌دهیم:

$$\log\frac{1}{|2-x|}=\log 1000 \Rightarrow \frac{1}{|2-x|}=1000 \Rightarrow \begin{cases} 2-x=\frac{1}{1000} \Rightarrow x_1=2-\frac{1}{1000} \\ 2-x=-\frac{1}{1000} \Rightarrow x_2=2+\frac{1}{1000} \end{cases}$$

**گام سوم:** حال خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

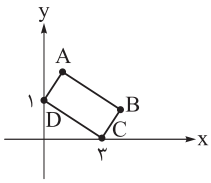
$$\log_{2\sqrt{2}}(x_1+x_2) \xrightarrow[x_1+x_2=4]{\text{از گام قبل}} \log_{2\sqrt{2}}4=\log_{2^{\frac{3}{2}}}2^2=\frac{2}{\frac{3}{2}}\log_2 2=\frac{4}{3}\log_2 2=\frac{4}{3}$$

کنکور اگر $\log_2(x^2+2x+4)+\log_2(x-2)=3$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt[3]{2}}x$ کدام است؟

(سؤال ۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۴

**۷** در شکل زیر، مساحت مستطیل برابر ۵ است. مجموع طول نقطهٔ A و عرض نقطهٔ B کدام است؟




۱) ۲

۲) ۲/۲۵

۳) ۲/۵

۴) ۲/۷۵

---

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

درس Box

**فاصلهٔ دو نقطه:**

- **حالت کلی (در صفحه):** فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

- حالت خاص (روی محور x): فاصلهٔ بین $A(x_A, 0)$ و $B(x_B, 0)$ برابر است با:

$$d(A,B) = |x_A - x_B|$$

- حالت خاص (روی محور y): فاصلهٔ بین $C(0, y_C)$ و $D(0, y_D)$ برابر است با:

$$d(C,D) = |y_C - y_D|$$

**وضعیت دو خط نسبت به هم:**

**۱) دو خط موازی:**

- دو خطی که موازی محور yها نیستند (شیب $m_1$ و $m_2$ دارند)، زمانی موازی هستند که شیب‌هایشان برابر باشد: $m_1 = m_2$.
- خطوط عمودی $x = a$ و $x = b$ با هم موازی هستند.

**۲) دو خط عمود بر هم:**

- دو خطی که موازی محورها نیستند، زمانی بر هم عمودند که حاصل‌ضرب شیب‌هایشان $-1$ باشد: $m_1 \times m_2 = -1$ (شیب هر کدام قرینه و معکوس دیگری است.)
- خطوط افقی $(y = b)$ و عمودی $(x = a)$ بر هم عمودند.

**۳) دو خط متقاطع:**

- برای یافتن مختصات نقطهٔ برخورد، کافی است دستگاه معادلات دو خط را حل کنیم:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

- اگر دستگاه، جواب نداشته باشد، دو خط موازی هستند.
- اگر دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد، دو خط بر هم منطبق هستند.

نکته

**فاصلهٔ دو خط موازی:**

فاصلهٔ بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**توجه** برای استفاده از فرمول بالا، ضروری است که ضرایب x و y در هر دو معادله دقیقاً یکسان باشند. اگر یکسان نبودند، باید یکی از معادلات را در عددی ضرب کنیم تا ضرایب a و b برابر شوند.

**پاسخ خیلی تشریحی** ✔ **گام اول**: ابتدا طول ضلع CD و معادلهٔ خطی را که ضلع CD روی آن قرار دارد، مشخص می‌کنیم:

معادلهٔ ضلع CD : $x+۳y=۳$

$$CD=\sqrt{۱^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۰}$$

$$S_{ABCD}=۵ \Rightarrow ۵=\sqrt{۱۰}\times BC \Rightarrow BC=AD=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

**گام دوم**: حال به کمک رابطهٔ فاصلهٔ دو خط موازی، معادلهٔ خطی را که ضلع AB روی آن قرار دارد، به دست می‌آوریم:

معادلهٔ ضلع AB: $x+۳y+c=۰$

$$\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}=\frac{|-۳-c|}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow ۵=|-۳-c| \Rightarrow \begin{cases} c=-۸ & ✓ \\ c=+۲ & \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

معادلهٔ ضلع AB : $x+۳y=۸$

**گام سوم**: با توجه به این‌که طول و عرض مستطیل بر هم عمودند، معادلهٔ خطوطی را که اضلاع AD و BC روی آن‌ها قرار دارند، به دست می‌آوریم:

$$m_{CD}=\frac{-۱}{۳} \Rightarrow m_{AD}=m_{BC}=۳$$

معادلهٔ ضلع BC با نقطهٔ $(۳,۰)$ : $y-۰=۳(x-۳) \Rightarrow y=۳x-۹$

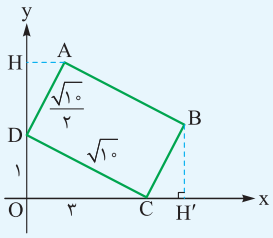
معادلهٔ ضلع AD با نقطهٔ $(۰,۱)$ : $y-۱=۳(x-۰) \Rightarrow y=۳x+۱$

**گام چهارم**: برای مشخص‌کردن مختصات A و B داریم:

$$A:\begin{cases} y=۳x+۱ \\ x+۳y=۸ \end{cases} \Rightarrow A(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲}) \qquad B:\begin{cases} y=۳x-۹ \\ x+۳y=۸ \end{cases} \Rightarrow B(\frac{۷}{۲},\frac{۳}{۲})$$

$$\Rightarrow \text{طول نقطهٔ A} + \text{عرض نقطهٔ B} = \frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}=۲$$

**یه‌جور دیگه** پس از گام اول، شکل مقابل را داریم:




دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OCD و AHD با نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$ متشابه هستند و داریم:

$$\frac{AD}{CD}=\frac{HD}{OC}=\frac{AH}{OD}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} AH=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x_A=\frac{۱}{۲} \\ HD=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

و مثلث‌های AHD و $BH'C$ نیز هم‌نهشت هستند؛ بنابراین $BH'=HD=۱/۵$ است؛ این یعنی $y_B=۱/۵$ است.

**۸** **دو خط موازی با شیب غیرصفر، یکی محور xها را با طول ۱ و دیگری محور yها را با عرض ۲ قطع می‌کند. اگر فاصلهٔ بین این دو خط موازی ۲ باشد، شیب آن‌ها کدام است؟**

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

Hint معادلهٔ خط‌ها رو بنویس و از فرمول فاصلهٔ بین دو خط موازی استفاده کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

**گام اول:** با توجه به اطلاعات سؤال، یکی از خط‌ها از نقطهٔ $(۱,۰)$ و یکی از خط‌ها از نقطهٔ $(۰,۲)$ عبور می‌کند. چون این خط‌ها موازی هستند، شیب برابر دارند، شیب آن‌ها را a در نظر می‌گیریم و معادلهٔ خط‌ها را تشکیل می‌دهیم:

$$y-۰=a(x-۱) \Rightarrow y-ax+a=۰$$

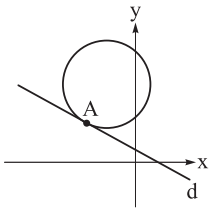
$$y-۲=a(x-۰) \Rightarrow y-ax-۲=۰$$

**گام دوم:** حال از فرمول فاصلهٔ بین دو خط موازی استفاده می‌کنیم. فاصلهٔ بین دو خط طبق فرض برابر ۲ است، پس:

$$d=\frac{|a-(-۲)|}{\sqrt{۱+a^۲}} \xrightarrow{d=۲} ۲=\frac{|a+۲|}{\sqrt{۱+a^۲}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۲\sqrt{۱+a^۲}=|a+۲|$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴+۴a^۲=a^۲+۴a+۴ \Rightarrow ۳a^۲-۴a=۰ \Rightarrow a(۳a-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۰ \times \\ a=\frac{۴}{۳} \checkmark \end{cases}$$

**۹** در شکل زیر، شعاع دایره برابر $\sqrt{۱۰}$ و مرکز آن روی خط $y = x + ۵$ قرار دارد. اگر خط d در نقطهٔ $A(-۲,۱)$ بر دایره مماس باشد، معادلهٔ خط d کدام است؟




۱) $۳y + x = ۲$

۲) $۳y + x = ۱$

۳) $۴y + x = ۱$

۴) $۴y + x = ۲$

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول**: مختصات مرکز دایره را به صورت $O(\alpha, \alpha + ۵)$ در نظر می‌گیریم، در نتیجه داریم:

$$AO = \sqrt{۱۰} \Rightarrow \sqrt{(\alpha+۲)^۲ + (\alpha+۴)^۲} = \sqrt{۱۰} \Rightarrow \alpha^۲ + ۴\alpha + ۴ + \alpha^۲ + ۸\alpha + ۱۶ = ۱۰$$

$$\Rightarrow ۲\alpha^۲ + ۱۲\alpha + ۱۰ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ + ۶\alpha + ۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -۱ \\ \alpha = -۵ \end{cases}$$

اگر $\alpha = -۵$ باشد، مختصات مرکز به صورت $O(-۵,۰)$ می‌شود که با توجه به شکل قابل قبول نیست، پس $\alpha = -۱$ و $O(-۱,۴)$.

**گام دوم**: شعاع دایره در نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، در نتیجه برای نوشتن معادلهٔ خط d داریم:

$$m_{OA} = \frac{۴-۱}{-۱-(-۲)} = ۳ \Rightarrow m_d = -\frac{۱}{۳}$$

معادلهٔ خط d با نقطهٔ $(-۲,۱)$ : $y - ۱ = -\frac{۱}{۳}(x+۲) \Rightarrow ۳y - ۳ = -x - ۲ \Rightarrow ۳y + x = ۱$

**۱۰** مجموع ۵۰ جملهٔ اول دنبالهٔ $a_n = n + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ کدام است؟

۱) ۱۲۷۳ ۲) ۱۲۷۴ ۳) ۱۲۷۵ ۴) ۱۲۷۶

---

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**Hint** حساب کن ببین که $-1$ کجا به توان فرد و کجا به توان زوج می‌رسه.

**نکته** مجموع اعداد $1+2+3+\ldots+n$ برابر می‌شود با:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

**پاسخ خیلی تشریحی ✔**

**گام اول:** مقدار عبارت $\frac{n(n+1)}{2}$ دوتا دوتا فرد و زوج می‌شود. به ازای $n = 1, 2$ فرد، به ازای $n = 3, 4$ زوج و به همین ترتیب به ازای $n = 49, 50$ فرد می‌شود. هم‌چنین می‌دانیم که $-1$ به توان فرد برابر خودش و به توان زوج برابر ۱ می‌شود.

$$\frac{n(n+1)}{2}: \underbrace{1}_{\text{فرد}}, \underbrace{3, 6}_{\text{زوج}}, \underbrace{10, 15}_{\text{فرد}}, \underbrace{21, \ldots, \frac{49\times50}{2}}_{\text{فرد}}, \frac{50\times51}{2}$$

**گام دوم:** حال $n = 1$ تا $n = 50$ را در دنبالهٔ $a_n = n + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ قرار می‌دهیم و آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم. توجه کنید که با توجه به توضیحات گام اول، ۲۶تا $-1$ و ۲۴تا ۱ داریم:

$$(-1)+(2-1)+(3+1)+(4+1)+\ldots+(49-1)+(50-1)=(1+2+3+\ldots+50)+26(-1)+24(1)$$

$$=\frac{50\times51}{2}-26+24=1275-2=1273$$

**۱۱** در یک دنبالهٔ حسابی ۵۹جمله‌ای، مجموع ۳ جملهٔ وسط برابر ۶۰ است. اگر قدرنسبت برابر ۳ باشد، جملهٔ چهلم دنباله کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۵۵

---

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**Hint** ۳ جملهٔ وسط $a_{۳۱}$، $a_{۳۰}$ و $a_{۲۹}$ هستند، اون‌ها رو برحسب $a_۱$ و $d$ بنویس.

**درس Box**

**دنبالهٔ حسابی:**

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) با اضافه‌شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنبالهٔ حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گویند.

جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت $d$ به صورت زیر است:

جملهٔ اول ↑ قدر نسبت ↑

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d$$

به عنوان مثال اگر $a_{۱۸}$ را بخواهیم برحسب $a_۱$ و $d$ بنویسیم، برابر می‌شود با $a_{۱۸} = a_۱ + ۱۷d$.

**پاسخ خیلی تشریحی ✔**

**گام اول:** سه جملهٔ وسط $a_{۲۹}$، $a_{۳۰}$ و $a_{۳۱}$ هستند، پس:

$$a_{۲۹} + a_{۳۰} + a_{۳۱} = (a_۱ + ۲۸d) + (a_۱ + ۲۹d) + (a_۱ + ۳۰d) = ۶۰ \Rightarrow ۳a_۱ + ۸۷d = ۶۰$$

**گام دوم:** قدرنسبت برابر ۳ است، پس:

$$۳a_۱ + ۸۷d = ۶۰ \xrightarrow{d=۳} ۳a_۱ + ۲۶۱ = ۶۰ \Rightarrow ۳a_۱ = -۲۰۱ \Rightarrow a_۱ = -۶۷$$

**گام سوم:** حال که $a_۱$ و $d$ را داریم، خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$a_{۴۰} = a_۱ + ۳۹d \xrightarrow[d=۳]{a_۱=-۶۷} a_{۴۰} = -۶۷ + ۱۱۷ \Rightarrow a_{۴۰} = ۵۰$$

**نکته** اگر $a$، $b$ و $c$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، آن‌گاه $b$ را واسطهٔ حسابی می‌نامیم و خواهیم داشت:

$$b = \frac{a+c}{۲}$$

**یه‌جور دیگه**

$a_{۳۰}$ واسطهٔ حسابی $a_{۲۹}$ و $a_{۳۱}$ است:

$$a_{۳۰} = \frac{a_{۲۹} + a_{۳۱}}{۲} \Rightarrow ۲a_{۳۰} = a_{۳۱} + a_{۲۹}$$

$$a_{۲۹} + a_{۳۰} + a_{۳۱} = ۶۰ \xrightarrow{۲a_{۳۰} = a_{۳۱} + a_{۲۹}} ۳a_{۳۰} = ۶۰ \Rightarrow a_{۳۰} = a_۱ + ۲۹d = ۲۰$$

قدرنسبت برابر ۳ است، پس داریم:

$$\xrightarrow{d=۳} a_{۴۰} = a_{۳۰} + ۱۰d = ۲۰ + ۳۰ = ۵۰$$

**۱۲** در دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, \ldots$، مجموع پنج جملهٔ اول چند برابر مجموع پنج جملهٔ سوم است؟

جملات یازدهم تا پانزدهم

۱) ۵۱۲
۲) $\frac{۱}{۵۱۲}$
۳) ۱۰۲۴
۴) $\frac{۱}{۱۰۲۴}$

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**درس Box**

**دنبالهٔ هندسی:**

دنباله‌ای را که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) از ضرب جملهٔ قبل از خودش در عددی ثابت و مخالف صفر به دست می‌آید، دنبالهٔ هندسی می‌گوییم. این عدد ثابت را قدرنسبت می‌گوییم و آن را با r نشان می‌دهیم.

جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت r به صورت زیر است:

$$a_n = a_۱ r^{n-۱}$$

به عنوان مثال $a_۶$ را به صورت $a_۶ = a_۱ r^۵$ می‌نویسیم.

**پاسخ خیلی تشریحی ✔**

**گام اول:** با توجه به قدرنسبت دنبالهٔ هندسی، خواستهٔ سؤال را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{\overbrace{a_۱ + a_۱r + a_۱r^۲ + a_۱r^۳ + a_۱r^۴}^{\text{مجموع ۵ جملهٔ اول}}}{\underbrace{a_۱r^{۱۰} + a_۱r^{۱۱} + a_۱r^{۱۲} + a_۱r^{۱۳} + a_۱r^{۱۴}}_{\text{مجموع ۵ جملهٔ سوم}}}$$

صورت و مخرج را بر $a_۱$ تقسیم می‌کنیم و سپس از فاکتورگیری استفاده می‌کنیم:

$$\frac{a_۱ + a_۱r + a_۱r^۲ + a_۱r^۳ + a_۱r^۴}{a_۱r^{۱۰} + a_۱r^{۱۱} + a_۱r^{۱۲} + a_۱r^{۱۳} + a_۱r^{۱۴}} = \frac{a_۱(۱ + r + r^۲ + r^۳ + r^۴)}{a_۱r^{۱۰} + a_۱r^{۱۱} + a_۱r^{۱۲} + a_۱r^{۱۳} + a_۱r^{۱۴}} = \frac{a_۱ (۱ + r + r^۲ + r^۳ + r^۴)}{a_۱r^{۱۰} (۱ + r + r^۲ + r^۳ + r^۴)} = \frac{۱}{r^{۱۰}}$$

**گام دوم:** قدرنسبت دنباله برابر $r = \frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}$ است؛ بنابراین خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$\frac{۱}{r^{۱۰}} = \frac{۱}{(\frac{۱}{۲})^{۱۰}} = ۱۰۲۴$$

**۱۳** اگر $a , b , c$ به ترتیب سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی غیرثابت و $a , 2b , 3c$ به ترتیب سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**Hint** توجه کن که $b = ar$ و $c = ar^2$، حالا دنبال جایگزینی مناسب توی دنبالهٔ حسابی باش.

**پاسخ خیلی تشریحی** **گام اول:** اگر $a , b , c$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند و $r$ قدرنسبت آن‌ها باشد، خواهیم داشت:

$$\underset{\times r \quad \times r}{a , b , c} \Rightarrow b = ar, c = ar^2$$

**گام دوم:** هم‌چنین $a , 2b , 3c$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی هستند. $2b$ واسطهٔ حسابی $a$ و $3c$ است، پس:

$$2b = \frac{a + 3c}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4b = a + 3c$$

**گام سوم:** حال روابط به‌دست‌آمده در گام اول را در رابطهٔ به‌دست‌آمده در گام دوم جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\xrightarrow[c=ar^2]{b=ar} 4ar = a + 3ar^2 \quad (*)$$

$$\xrightarrow[a \neq 0]{\text{دو طرف تقسیم بر } a} 4r = 1 + 3r^2 \Rightarrow 3r^2 - 4r + 1 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است.}} \begin{cases} r = 1 \times \\ r = \frac{1}{3} \checkmark \end{cases}$$

دقت کنید که چون طبق فرض دنبالهٔ هندسی غیرثابت است، $r = 1$ غیر قابل قبول است.

کنکور **اگر $a , b , c$ سه جملهٔ نخست و متمایز یک دنبالهٔ حسابی بوده و $b , \frac{1}{2}a , \frac{1}{4}c$ سه جملهٔ نخست یک دنبالهٔ هندسی باشند، دو برابر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است.** *(سؤال ۱۱۳ کنکور تجربی ۱۴۰۴- نوبت دوم)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $-1$ ۴) $-2$

**۱** **اگر میانگین هفت دادهٔ آماری ۲۰ باشد، کدام داده به داده‌ها اضافه شود تا میانگین ۲ واحد کاهش یابد؟**

میانگین مرحلهٔ دوم برابر ۱۸ است.

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۶

۴) امکان‌پذیر نیست.

---

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**درس Box**

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \Rightarrow \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = n\bar{x}$$

**پاسخ خیلی تشریحی ✔**

**گام اول:** میانگین ۷ داده برابر ۲۰ است، پس مجموع آن‌ها برابر $۷ \times ۲۰ = ۱۴۰$ است.

میانگین ۸ داده در مرحلهٔ دوم باید برابر $۲۰ - ۲ = ۱۸$ باشد.

**گام دوم:** اگر دادهٔ مجهول را d بنامیم، داریم:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{۱۴۰ + d}{۸} = ۱۸ \Rightarrow ۱۴۰ + d = ۱۴۴ \Rightarrow d = ۴$$

سنجش کلاد

**۲** اگر میانگین داده‌های $۳x_{۱}-۱, ۳x_{۲}-۱, \cdots, ۳x_{۱۰۰}-۱$ برابر ۵۹ باشد، میانگین داده‌های $x_{۱}+۱, x_{۲}+۲, \cdots, x_{۱۰۰}+۱۰۰$ کدام است؟

۱) ۱۵۰/۵
۲) ۷۰/۵
۳) ۲۲۶/۵
۴) ۱۲۰/۵

---

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**نکته**

- مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است.
- اگر میانگین داده‌های $x_{۱}, x_{۲}, \cdots, x_{n}$ برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده‌های $ax_{۱}+b, ax_{۲}+b, \cdots, ax_{n}+b$ برابر $a\bar{x}+b$ است.

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** طبق نکتهٔ بالا برای فرض سؤال داریم:

$$۳x_{۱}-۱, ۳x_{۲}-۱, \cdots, ۳x_{۱۰۰}-۱ : ۳\bar{x}-۱=۵۹ \Rightarrow \bar{x}=۲۰$$

**گام دوم:** حالا خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x}_{\text{جدید}}=\frac{(x_{۱}+۱)+(x_{۲}+۲)+\cdots+(x_{۱۰۰}+۱۰۰)}{۱۰۰}=\frac{x_{۱}+x_{۲}+\cdots+x_{۱۰۰}}{۱۰۰}+\frac{۱+۲+۳+\cdots+۱۰۰}{۱۰۰}$$

$$=\bar{x}+\frac{\frac{۱۰۰\times۱۰۱}{۲}}{۱۰۰}=\bar{x}+۵۰/۵$$

$$\xrightarrow{\bar{x}=۲۰} \bar{x}_{\text{جدید}}=۲۰+۵۰/۵=۷۰/۵$$

سنجش کلاد

**۳** **میانگین ۲۴ دادهٔ آماری برابر ۱۴ است. اگر مجموع داده‌های کم‌تر از چارک اول، مجموع داده‌های بین چارک‌های اول و سوم و مجموع داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم، تشکیل دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۲ بدهند، میانگین داده‌هایی که بین چارک‌های اول و سوم قرار ندارند، کدام است؟**

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**درس Box**

**میانه** $(Q_2)$: $n$ دادهٔ موجود را مرتب می‌کنیم:

- اگر $n$ فرد باشد، دادهٔ وسط یعنی $\frac{n+1}{2}$اُمین داده میانه است.
- اگر $n$ زوج باشد، میانگین $\frac{n}{2}$اُمین و $(\frac{n}{2}+1)$اُمین داده میانه است.

**چارک اول** $(Q_1)$: میانهٔ داده‌های کوچک‌تر از $Q_2$ را چارک اول می‌نامیم.

**چارک دوم** $(Q_3)$: میانهٔ داده‌های بزرگ‌تر از $Q_2$ را چارک سوم می‌نامیم.

**پاسخ خیلی تشریحی ✓**

**گام اول:** میانهٔ ۲۴ داده، میانگین داده‌های دوازدهم و سیزدهم است. میانهٔ داده‌های کوچک‌تر از میانه، یعنی میانگین داده‌های ششم و هفتم، چارک اول است. میانگین داده‌های هجدهم و نوزدهم چارک سوم است.

$$\underset{\downarrow Q_1}{x_6}\ x_7 \quad \underset{\downarrow Q_2}{x_{12}}\ x_{13} \quad \underset{\downarrow Q_3}{x_{18}}\ x_{19}$$

**گام دوم:** طبق فرض سؤال، اگر مجموع داده‌های $x_1$ تا $x_6$ را $S$ بنامیم، مجموع داده‌های $x_7$ تا $x_{18}$ برابر $2S$ و مجموع داده‌های $x_{19}$ تا $x_{24}$ برابر $4S$ خواهد بود.

بنابراین مجموع همهٔ داده‌ها برابر $7S$ و میانگین آن‌ها $\frac{7S}{24}$ است که باید برابر ۱۴ قرار دهیم.

$$\frac{7S}{24}=14 \Rightarrow S=\frac{24\times14}{7}=48$$

**گام سوم:** بنابراین مجموع داده‌هایی که بین چارک‌های اول و سوم قرار ندارند، برابر $S+4S=5S=240$ است. میانگین این ۱۲ داده برابر است با:

$$\frac{240}{12}=20$$

**۴** میانگین و واریانس داده‌های $a,b,c,d$ به ترتیب ۴ و ۵ است. واریانس داده‌های $\frac{a}{۲},\frac{b}{۲},\frac{c}{۲},\frac{d}{۲},\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) ۰/۸۴ ۲) ۱ ۳) ۱/۱۶ ۴) ۱/۳۶

---

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**درس Box**

واریانس داده‌های $x_۱,x_۲,\cdots,x_n$ از راه‌های زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma^۲=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\cdots+(x_n-\bar{x})^۲}{n}$$

$$\sigma^۲=\frac{x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲}{n}-\bar{x}^۲$$

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** در چهار دادهٔ اولیه داریم:

$$\bar{x}=\frac{a+b+c+d}{۴}=۴\Rightarrow a+b+c+d=۱۶$$

$$\sigma^۲=\frac{a^۲+b^۲+c^۲+d^۲}{۴}-۱۶=۵\Rightarrow a^۲+b^۲+c^۲+d^۲=۸۴$$

**گام دوم:** حالا برای محاسبهٔ واریانس داده‌های جدید، به میانگین جدید هم نیاز داریم:

$$\bar{x}_{\text{جدید}}=\frac{\frac{a}{۲}+\frac{b}{۲}+\frac{c}{۲}+\frac{d}{۲}+\frac{۱}{۲}}{۵}=\frac{(a+b+c+d)+۱}{۱۰}=\frac{۱۷}{۱۰}=۱/۷$$

$$\Rightarrow \sigma^۲_{\text{جدید}}=\frac{\frac{a^۲}{۴}+\frac{b^۲}{۴}+\frac{c^۲}{۴}+\frac{d^۲}{۴}+\frac{۱}{۴}}{۵}-۱/۷^۲=\frac{a^۲+b^۲+c^۲+d^۲+۱}{۲۰}-۱/۷^۲$$

$$\Rightarrow \sigma^۲_{\text{جدید}}=\frac{۸۵}{۲۰}-۱/۷^۲=۴/۲۵-۲/۸۹=۱/۳۶$$

**کنکور**

میانگین و واریانس چهار عدد $a$، $b$، $c$ و $d$ به ترتیب ۳ و ۱/۵ است. واریانس داده‌های $a$، $b$، $c$ و $d$ کدام است؟

(سؤال ۱۲۶ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)

۱) ۰/۷۵ ۲) ۰/۹۴ ۳) ۱/۶۵ ۴) ۱/۸۴

**۵** در متن زیر متغیرها معلوم شده‌اند. چند متغیر از نوع کیفی ترتیبی هستند؟

او در جوانی، در کنکور کارشناسی ارشد رشتهٔ شیمی، رتبهٔ ۲۳ آورد.

شاخص آلودگی هوا با مقدار ۱۶۰ در وضعیت خطرناک قرار دارد.

اتومبیل با ظرفیت ۵ نفر و جرم ۱۵۰۰ کیلوگرم، در هر صد کیلومتر ۹/۵ لیتر مصرف دارد.

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

**پاسخ خیلی تشریحی ✔** متغیرهایی که نوعی ترتیب طبیعی دارند، کیفی ترتیبی هستند.

۱) مراحل تحصیل (مثلاً کارشناسی ارشد)

۲) مقام در مسابقه (مثلاً رتبهٔ ۲۳)

۳) وضع آلودگی هوا (پاک، سالم، ناسالم برای گروه‌های حساس، خطرناک)

بررسی سایر موارد:

رشتهٔ شیمی، دادهٔ کیفی اسمی است.

عدد ۱۶۰ برای شاخص آلودگی هوا، عدد ۵ برای ظرفیت خودرو، عدد ۱۵۰۰ برای جرم خودرو و عدد ۹/۵ لیتر برای میزان مصرف بنزین، داده‌های کمی هستند.

سنجش کلاد

**۶** در ۱۸ دادهٔ آماری، چارک‌های اول تا سوم به ترتیب ۱۱، ۱۵ و ۲۲ هستند. اگر میانگین داده‌های کم‌تر از $Q_1$، بین $Q_1$ و $Q_3$ و بیشتر از $Q_3$ به ترتیب ۷، ۱۶ و ۲۴ باشند، میانگین کل داده‌ها تقریباً کدام است؟

۱) ۱۵/۸ ۲) ۱۵/۳ ۳) ۱۶/۶ ۴) ۱۶/۱

**Hint** نیازی به چارک دوم نداری. داده‌ها رو بنویس و از فرضای سؤال استفاده کن.

**درس Box**

میانگین: میانگین (معدل) داده‌های $x_1$، $x_2$، ... و $x_n$ را از راه زیر حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

چارک‌ها:

برای به دست آوردن چارک‌های $n$ داده، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و به طریق زیر چارک‌ها را به دست می‌آوریم:

**چارک اول:** مقداری است که ۲۵٪ داده‌ها از آن کوچک‌تر و ۷۵٪ داده‌ها از آن بزرگ‌تر است.

۱) اگر $n = 4k$ یا $n = 4k+1$ باشد، میانگین داده‌های $k$اُم و $(k+1)$اُم چارک اول است:

$$Q_1 = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$$

۲) اگر $n = 4k+2$ یا $n = 4k+3$ باشد، دادهٔ $(k+1)$اُم چارک اول است.

**چارک دوم (میانه):** مقداری است که نصف داده‌ها از آن کوچک‌تر و نصف داده‌ها از آن بزرگ‌تر است.

۱) اگر $n$ فرد باشد، دادهٔ $\frac{n+1}{2}$اُم میانه است.

۲) اگر $n$ زوج باشد، میانگین داده‌های $\frac{n}{2}$اُم و $(\frac{n}{2}+1)$اُم میانه است.

**چارک سوم:** مقداری است که ۷۵٪ داده‌ها از آن کوچک‌تر و ۲۵٪ داده‌ها از آن بزرگ‌تر است.

۱) اگر $n = 4k$ باشد، میانگین داده‌های $(3k)$اُم و $(3k+1)$اُم چارک سوم است:

$$Q_3 = \frac{a_{3k} + a_{3k+1}}{2}$$

۲) اگر $n = 4k+1$ باشد، میانگین‌های $(3k+1)$اُم و $(3k+2)$اُم چارک سوم است:

$$Q_3 = \frac{a_{3k+1} + a_{3k+2}}{2}$$

۳) اگر $n = 4k+2$ باشد، دادهٔ $(3k+2)$اُم چارک سوم است.

۴) اگر $n = 4k+3$ باشد، دادهٔ $(3k+2)$اُم چارک سوم است.

**پاسخ خیلی تشریحی ✔**

**گام اول:** تعداد داده‌ها برابر $2+4\times4=18$ است؛ پس طبق درس box، دادهٔ پنجم $(x_5)$ چارک اول و دادهٔ چهاردهم $(x_{14})$ چارک سوم است:

$$x_5 = Q_1 = 11$$

$$x_{14} = Q_3 = 22$$

**گام دوم:** داده‌های کم‌تر از $Q_1$، داده‌های $x_1$ تا $x_4$ هستند:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 7 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28$$

بین $Q_1$ و $Q_3$، داده‌های $x_6$ تا $x_{13}$ هستند:

$$\frac{x_6 + x_7 + \ldots + x_{13}}{8} = 16 \Rightarrow x_6 + x_7 + \ldots + x_{13} = 128$$

داده‌های بیشتر از $Q_3$ نیز، داده‌های $x_{15}$ تا $x_{18}$ هستند.

$$\frac{x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18}}{4} = 24 \Rightarrow x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} = 96$$

**گام سوم:** مجموع‌های گام دوم را با دو دادهٔ گام اول جمع می‌کنیم تا میانگین به دست آید:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{18}}{18} = \frac{11+22+28+128+96}{18} = \frac{285}{18} = \frac{95}{6} = 15/8\overline{3}$$

**۷** تفاضل ۶ دادهٔ آماری از میانگینشان اعداد $b, ۰, ۰, a, -۱, ۳$ هستند. اگر $a$ و $b$ اعداد صحیح باشند، کم‌ترین مقدار واریانس داده‌ها کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

---

**Hint** مجموع عددهایی رو که می‌بینی برابر صفر قرار بده و بعدش از فرمول واریانس استفاده کن.

**درس Box**

**واریانس:** میانگین مربعات انحراف از میانگین داده‌ها را واریانس می‌نامیم:

$$\sigma^۲ = \frac{(x_۱ - \bar{x})^۲ + (x_۲ - \bar{x})^۲ + \ldots + (x_n - \bar{x})^۲}{n}$$

$x_i - \bar{x}$ را تفاضل میانگین از داده و $|x_i - \bar{x}|$ را انحراف از میانگین داده می‌نامند.

**نکته** مجموع تفاضل میانگین از داده‌ها همواره برابر صفر است:

$$(x_۱ - \bar{x}) + (x_۲ - \bar{x}) + \ldots + (x_n - \bar{x}) = ۰$$

**پاسخ خیلی تشریحی** ✔

**گام اول:** طبق نکتهٔ بالا، مجموع عددهایی را که می‌بینیم، برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$۳ - ۱ + a + b = ۰ \Rightarrow a + b = -۲$$

**گام دوم:** $a$ و $b$ صحیح هستند؛ پس حالت‌های زیر برای $a$ و $b$ برقرار هستند:

$$(a, b) = (-۱, -۱), (۰, -۲), (۱, -۳), \ldots$$

$$(-۱, -۱), (-۲, ۰), (-۳, ۱), \ldots$$

**گام سوم:** واریانس داده‌ها را می‌نویسیم:

$$\sigma^۲ = \frac{(+۳)^۲ + (-۱)^۲ + a^۲ + b^۲}{۶} \Rightarrow \sigma^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ + ۱۰}{۶}$$

و فقط در حالت $(a, b) = (-۱, -۱)$ است که کم‌ترین مقدار $a^۲ + b^۲$ و در نتیجه کم‌ترین مقدار $\sigma^۲$ به دست می‌آید.

$$(a^۲ + b^۲)_{min} = ۲ \Rightarrow \sigma^۲_{min} = \frac{۲ + ۱۰}{۶} = ۲$$

**۸** انحراف معیار داده‌های مثبت $۲a+۱ , a+۱ , a$ برابر با $\frac{\sqrt{۱۴}}{۳}$ است. نسبت بزرگ‌ترین داده به کوچک‌ترین داده کدام است؟

۱) ۲/۲۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

---

**درس Box**

جذر واریانس را انحراف معیار می‌نامیم:

$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\ldots+(x_n-\bar{x})^۲}{n}}$$

**نکتهٔ مهم:** $\sigma_{x\pm b}=\sigma_x$؛ یعنی اگر از همهٔ داده‌ها مقداری ثابت را کم کنیم، انحراف معیار و واریانس تغییر نمی‌کند.

**پاسخ خیلی تشریحی ✔**

**گام اول:** برای سادگی، $a$ را از همهٔ داده‌ها کم می‌کنیم:

$$۰,۱,a+۱$$

$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{۰+۱+a+۱}{۳}=\frac{a+۲}{۳}$$

**گام دوم:** واریانس برابر $\frac{۱۴}{۹}$ است و داریم:

$$\frac{۱۴}{۹}=\frac{(۰-\frac{a+۲}{۳})^۲+(۱-\frac{a+۲}{۳})^۲+(a+۱-\frac{a+۲}{۳})^۲}{۳}=\frac{\frac{a^۲+۴a+۴}{۹}+\frac{a^۲-۲a+۱}{۹}+\frac{۴a^۲+۴a+۱}{۹}}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۴}{۹}=\frac{۶a^۲+۶a+۶}{۲۷}=\frac{۶(a^۲+a+۱)}{۲۷} \Rightarrow a^۲+a+۱=۷$$

$$\Rightarrow a^۲+a-۶=(a+۳)(a-۲)=۰ \Rightarrow a=-۳,۲$$

**گام سوم:** داده‌ها مثبت‌اند؛ پس مقدار $a=۲$ قابل قبول است:

$$\Rightarrow x_i=۲,۳,۵$$

نسبت بزرگ‌ترین داده به کوچک‌ترین داده برابر $\frac{۵}{۲}=۲/۵$ است.

**۹** اگر میانگین و واریانس داده‌های $a, b, 10, 4, 3, 1$ به ترتیب برابر ۸ و ۳۵ باشد، حاصل $|a-b|$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

**Hint** دو معادله و دو مجهول داری. یک معادله برای $\bar{x}$ و یک معادله برای $\sigma^2$. هر دو رو بنویس و یک دستگاه ساده حل کن.

**درس Box** یک روش بهتر برای محاسبهٔ واریانس رابطهٔ زیر است:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

یعنی مربع میانگین را از میانگین مربعات داده‌ها کم می‌کنیم. این رابطه برای سؤالاتی که مستقیماً با مربع داده‌ها در ارتباطیم بهتر و ساده‌تر است.

**پاسخ خیلی تشریحی ✔** **گام اول:** میانگین داده‌ها را برابر ۸ قرار می‌دهیم:

$$\frac{1+3+4+10+a+b}{6} = 8 \Rightarrow \frac{a+b+18}{6} = 8 \Rightarrow a+b = 30 \quad (1)$$

**گام دوم:** واریانس را طبق رابطهٔ درس box برابر ۳۵ قرار می‌دهیم:

$$\sigma^2 = \frac{1+9+16+100+a^2+b^2}{6} - 8^2 = 35 \Rightarrow \frac{a^2+b^2+126}{6} - 64 = 35$$

$$\Rightarrow a^2+b^2 = 6(35+64) - 126 = 468 \quad (2)$$

**گام سوم:** حال که $a+b$ و $a^2+b^2$ را داریم، برای محاسبهٔ $|a-b|$ از اتحاد مربع دوجمله‌ای کمک می‌گیریم:

$$|a-b| = \sqrt{(a-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2-2ab} = \sqrt{a^2+b^2-((a+b)^2-(a^2+b^2))} = \sqrt{2(a^2+b^2)-(a+b)^2} = \sqrt{2(468)-30^2}$$

$$\Rightarrow |a-b| = \sqrt{36} = 6$$

**۱۰** به ۲۰ دادهٔ آماری با میانگین ۱۲ و واریانس ۶۰، داده‌های ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۵ و ۱۵ را اضافه می‌کنیم. ضریب تغییرات ۲۵ داده تقریباً کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

**درس Box**

برای این‌که تأثیر یکا در تحلیل و ارزیابی داده‌ها از بین برود، کمیتی تعریف می‌کنیم به نام ضریب تغییرات (coefficient of variation) که حاصل تقسیم انحراف معیار به میانگین است:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

**نکته** اگر دو دسته داده با میانگین یکسان را با هم ترکیب کنیم، میانگین تغییر نمی‌کند.

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** در ابتدا با استفاده از رابطهٔ اصلی واریانس، مجموع مربعات انحراف از میانگین ۲۰ دادهٔ اولیه را حساب می‌کنیم:

$$\sigma^۲ = \frac{(x_۱ - ۱۲)^۲ + (x_۲ - ۱۲)^۲ + \ldots + (x_{۲۰} - ۱۲)^۲}{۲۰} = ۶۰ \Rightarrow (x_۱ - ۱۲)^۲ + (x_۲ - ۱۲)^۲ + \ldots + (x_{۲۰} - ۱۲)^۲ = ۱۲۰۰$$

**گام دوم:** میانگین ۵ داده‌ای که اضافه کرده‌ایم، ۱۲ است:

$$\frac{۳(۱۰) + ۲(۱۵)}{۵} = ۱۲$$

پس میانگین ۲۵ داده نیز همان ۱۲ خواهد بود:

$$\bar{x} = ۱۲$$

**گام سوم:** حالا واریانس ۲۵ داده را حساب می‌کنیم:

$$\sigma^۲ = \frac{\overbrace{(x_۱ - ۱۲)^۲ + \ldots + (x_{۲۰} - ۱۲)^۲}^{۱۲۰۰} + ۳(۱۰ - ۱۲)^۲ + ۲(۱۵ - ۱۲)^۲}{۲۰ + ۵} = \frac{۱۲۰۰ + ۳(۴) + ۲(۹)}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۱۲۳۰}{۲۵} = \frac{۴۹۲۰}{۱۰۰} = ۴۹/۲۰ \Rightarrow \sigma \simeq ۷$$

**گام چهارم:** ضریب تغییرات تقریباً برابر است:

$$CV \simeq \frac{۷}{۱۲}$$

**۱۱** در داده‌های آماری $۲n+۷, ۲n+۵, ۲n+۳, ۲n+۱$ عدد میانگین شش برابر واریانس است. در داده‌های $۲n+۳, ۲n+۱, ۲n-۱, ۲n-۳, ۲n-۵$ ضریب تغییرات تقریباً چند درصد است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱/۲

۳) ۱۲/۴ ۴) ۱۳/۶

---

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** داده‌های اولیه ۴ عدد فرد متوالی‌اند، پس میانگین برابر معدل دوتای وسطی (یا معدل اولی و آخری) است:

$$\bar{x} = ۲n+۴$$

**گام دوم:** واریانس ۴ عدد فرد متوالی را با رابطهٔ $\sigma^۲ = \frac{n^۲-۱}{۱۲}d^۲$ به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow[d=۲]{n=۴} \sigma^۲ = \frac{۴^۲-۱}{۱۲}\times ۲^۲ = \frac{۱۵}{۱۲}\times ۴ = ۵$$

پس میانگین برابر $۲n+۴ = ۳۰$ است و داریم: $n = ۱۳$

**گام سوم:** حالا در داده‌های جدید با جای‌گذاری $n = ۱۳$ داریم:

$$۲۱, ۲۳, ۲۵, ۲۷, ۲۹$$

میانگین برابر ۲۵ و واریانس $\sigma^۲ = \frac{۵^۲-۱}{۱۲}\times ۲^۲ = ۸$ است.

**گام چهارم:** ضریب تغییرات برابر است با:

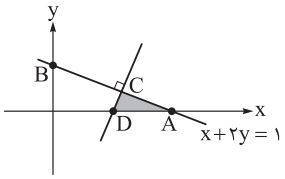
$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{۸}}{۲۵} \simeq \frac{۲(۱/۴)}{۲۵} = ٪۱۱/۲$$

**نکته** میانگین و واریانس داده‌های $x_۱, x_۲, x_۳, \ldots, x_n$ که تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d$ می‌دهند، به ترتیب برابرند با:

$$\bar{x} = \frac{x_۱ + x_n}{۲}$$

$$\sigma^۲ = \frac{n^۲-۱}{۱۲}d^۲ \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{n^۲-۱}{۱۲}}|d|$$

**۱** در شکل زیر اگر $BC = ۲AC$، آن‌گاه مساحت مثلث $ACD$ کدام است؟




۱) $\frac{۵}{۷۲}$

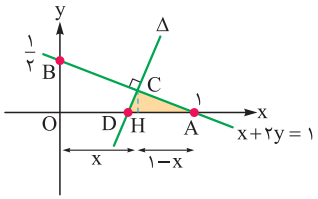
۲) $\frac{۵}{۳۶}$

۳) $\frac{۵}{۱۲}$

۴) $\frac{۵}{۱۴۴}$

**Hint** از نقطهٔ $C$ به محور $x$ها عمود رسم کن و از قضیهٔ تالس کمک بگیر!

**پاسخ خیلی تشریحی** **گام اول:** از نقطهٔ $C$ بر محور $x$ها عمود رسم می‌کنیم و در مثلث $ABO$ چون $CH \parallel BO$، طبق قضیهٔ تالس و تعمیم آن داریم:




$$\frac{AH}{OH} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{۱-x}{x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲-۲x = x \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CH}{OB} \Rightarrow \frac{AC}{۳AC} = \frac{CH}{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow CH = \frac{۱}{۶}$$

**گام دوم:** مختصات نقطهٔ $C$ به صورت $(\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۶})$ است و خط $\Delta$ بر خط $x+۲y=۱$ عمود است. در نتیجه:

$$m_{\Delta} = ۲$$

$$\Rightarrow \Delta: y - \frac{۱}{۶} = ۲(x - \frac{۲}{۳}) \Rightarrow \Delta: y = ۲x - \frac{۷}{۶}$$

**گام سوم:** برای پیداکردن طول نقطهٔ $D$ داریم:

$$۰ = ۲x - \frac{۷}{۶} \Rightarrow x = \frac{۷}{۱۲}$$

**گام چهارم:** مساحت مثلث $ADC$ برابر است با:

$$S_{\Delta ADC} = \frac{۱}{۲} \times |AD| \times |CH| = \frac{۱}{۲}(۱ - \frac{۷}{۱۲}) \times \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۱۲} \times \frac{۵}{۱۲} = \frac{۵}{۱۴۴}$$

**نکته** اگر خطوط $d$ و $d'$ به ترتیب با شیب‌های $m$ و $m'$ بر هم عمود باشند، آن‌گاه $mm' = -۱$ و برعکس.

**۲** فاصلهٔ قرینهٔ نقطهٔ $(-۲,۶)$ نسبت به خط $x+y+۱=۰$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۵ ۲) $۲\sqrt{۱۰}$

۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

**مشاوره** در حل تست‌های هندسهٔ تحلیلی، کلید حل سؤال کشیدن شکل تقریبی مناسب است.

**Hint** فقط شکل بکش تا بفهمی باید چی‌کار بکنی!

**درس Box**

اگر $A$ و $B$ دو نقطه در صفحهٔ مختصات و $M$ وسط پاره‌خط $AB$ باشد، مختصات نقطهٔ $M$ برابر است با:

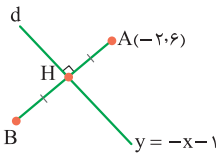
$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}\quad,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** ابتدا شکلی فرضی رسم می‌کنیم تا خواستهٔ مسئله را واضح‌تر درک کنیم:




**گام دوم:** با توجه به شکل رسم‌شده، ما به دنبال مختصات نقطهٔ $B$ هستیم؛ پس ابتدا معادلهٔ خط $AB$ را به کمک شیب و نقطهٔ $(-۲,۶)$ مشخص می‌کنیم:

$$d\perp AB\Rightarrow m_d\times m_{AB}=-۱\Rightarrow m_{AB}=۱$$

$$y-۶=۱(x+۲)\Rightarrow y=x+۸$$

**گام سوم:** مختصات نقطهٔ $H$ محل برخورد خط $d$ و $AB$ است:

$$x+۸=-x-۱\Rightarrow x=\frac{-۹}{۲}\Rightarrow y=\frac{۷}{۲}\Rightarrow H(\frac{-۹}{۲},\frac{۷}{۲})$$

**گام چهارم:** نقطهٔ $H$، مختصات وسط دو نقطهٔ $A$ و $B$ است؛ پس:

$$H=\frac{A+B}{۲}\Rightarrow B=۲H-A=(-۹,۷)-(-۲,۶)=(-۷,۱)$$

**گام پنجم:** حال فاصلهٔ نقطهٔ $B(-۷,۱)$ را از مبدأ مختصات حساب می‌کنیم:

$$OB=\sqrt{(-۷-۰)+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

**۳** اگر $۳x-۴y-۱=۰$ و $۲x+y=۳$ و $۳x+۲y=۵$، به ترتیب معادلات خطوطی باشند که اضلاع **AB**، **AC** و **BC** از مثلث **ABC** روی آن‌ها قرار دارد، اندازهٔ ارتفاع **CH** کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳

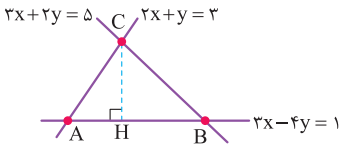
۳) ۰/۶ ۴) ۰/۴

**Hint** مختصات رأس C رو پیدا کن و فاصله‌اش رو از خط AB به دست بیار!

**درس Box** فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$AH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

**پاسخ خیلی تشریحی ✔** **گام اول:** ابتدا شکل مقابل را در نظر بگیرید:




**گام دوم:** با توجه به شکل، اندازهٔ ارتفاع CH برابر فاصلهٔ نقطهٔ C از ضلع AB است؛ مختصات نقطهٔ C را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}۳x+۲y=۵\\۲x+y=۳\end{cases}\Rightarrow x=۱\,,\,y=۱\Rightarrow C(۱,۱)$$

**گام سوم:** حال فاصلهٔ نقطهٔ C را از ضلع AB به دست می‌آوریم:

$$CH=\frac{|۳-۴-۱|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۲}{۵}=۰/۴$$

**۴** دو رأس **B** و **C** از مثلث متساوی‌الساقین **ABC** $(AB = AC)$ با عرض‌های $-۱$ و ۴ روی خط $y = x + ۱$ واقع‌اند. اگر رأس **A** روی محور **x** قرار داشته باشد، مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۷/۵ ●

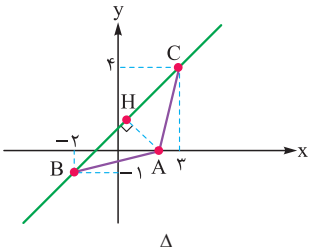
۲) ۵/۵

۳) ۳/۵

۴) ۱/۵

**Hint** اول شکل بکش و از مختصات وسط پاره‌خط BC استفاده کن!

**پاسخ خیلی تشریحی** ✔ **گام اول:** ابتدا شکل مقابل را در نظر بگیرید:




Δ

**گام دوم:** با توجه به شکل، برای پیداکردن مساحت مثلث ABC نیاز به اندازهٔ ارتفاع AH داریم. چون ABC متساوی‌الساقین است، پس AH هم ارتفاع هم عمودمنصف و هم میانه است؛ در نتیجه:

$$H = \frac{B + C}{۲} = (\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$$

**گام سوم:** حال معادلهٔ خط AH را می‌نویسیم:

$$AH \perp BC \Rightarrow m_{AH} \times m_{BC} = -۱ \Rightarrow m_{AH} = -۱$$

$$\Rightarrow y - \frac{۳}{۲} = -۱(x - \frac{۱}{۲}) \Rightarrow AH: y = -x + ۲$$

**گام چهارم:** با توجه به این‌که رأس A روی محور x و خط AH قرار دارد، پس:

$$۰ = -x + ۲ \Rightarrow A(۲, ۰)$$

**گام پنجم:** حال اندازهٔ ارتفاع AH یعنی فاصلهٔ نقطهٔ A از خط $x - y + ۱ = ۰$ و فاصلهٔ دو نقطهٔ B و C را محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} AH = \frac{|۲ - ۰ + ۱|}{\sqrt{۲}} = \frac{۳}{\sqrt{۲}} \\ BC = \sqrt{(۳ - (-۲))^۲ + (۴ - (-۱))^۲} = \sqrt{۲۵ + ۲۵} = ۵\sqrt{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲} \times ۵\sqrt{۲} \times \frac{۳}{\sqrt{۲}} = \frac{۱۵}{۲} = ۷/۵$$

**۵** معادلهٔ دو ضلع مقابل مستطیلی $y = ax - b$ و $y = (2a-1)x + 4a$ است. اگر $B(1,2)$ یک رأس این مستطیل و محیط آن $10\sqrt{2}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۲۱

۳) ۱۰/۵ ۴) ۱۷/۵

**Hint** دو ضلع مقابل مستطیل با هم موازی و دو خط موازی دارای شیب برابرند.

**پاسخ خیلی تشریحی** **گام اول:** دو ضلع مقابل مستطیل با هم موازی‌اند؛ پس:

$$2a-1=a \Rightarrow a=1$$

**گام دوم:** معادلهٔ دو ضلع مقابل به صورت $L_1: y=x-b$ و $L_2: y=x+4$ است و مختصات رأس $B$ در یکی از این دو خط باید صدق کند:

$$B \notin L_2 \Rightarrow B \in L_1 \Rightarrow 2=1-b \Rightarrow b=-1 \Rightarrow L_1: y=x+1$$

**گام سوم:** فاصلهٔ این دو خط موازی برابر طول (عرض) مستطیل است:

$$\begin{cases} y=x+4 \\ y=x+1 \end{cases} \Rightarrow d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{4-1}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

**گام چهارم:** به کمک مقدار محیط مستطیل، اندازهٔ عرض (طول) آن را مشخص می‌کنیم و مساحت آن را به دست می‌آوریم:

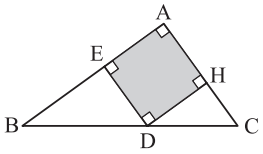
$$2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\text{عرض}\right)=10\sqrt{2} \Rightarrow \text{عرض}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{7\sqrt{2}}{2}=\frac{21}{2}=10/5$$

**نکته** فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ برابر است با:

$$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

**۶** در شکل زیر اگر $BD = ۳CD$، آن‌گاه مساحت قسمت رنگی چه کسری از مساحت مثلث $ABC$ است؟




۱) $\frac{۳}{۸}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

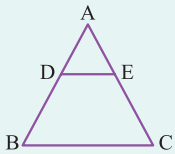
۳) $\frac{۳}{۵}$

۴) $\frac{۴}{۹}$

**Hint** اول نسبت خواسته‌شده را بنویس و طبق اون تالس بزن!

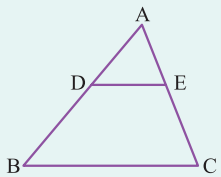
**درس Box**

قضیهٔ تالس: هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آن‌ها تشکیل یک تناسب را می‌دهند. به طور خلاصه هرگاه مانند شکل زیر داشته باشیم $DE \parallel BC$، آن‌گاه:




$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

تعمیم قضیهٔ تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند. مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:




$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

**پاسخ خیلی تشریحی ✔** **گام اول:** ابتدا خواستهٔ مسئله را می‌نویسیم:

$$\frac{S_{AHDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{DH \times AH}{\frac{۱}{۲} \times AC \times AB}$$

**گام دوم:** حال در مثلث $ABC$ چون $DH \parallel AB$، طبق قضیهٔ تالس و تعمیم آن داریم:

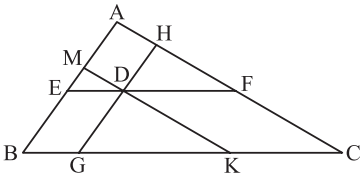
$$\frac{CD}{BD} = \frac{CH}{AH} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow AH = ۳m \, , \, CH = m \Rightarrow AC = AH + CH = ۴m$$

$$\frac{CD}{BC} = \frac{DH}{AB} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow AB = ۴k \, , \, DH = k$$

**گام سوم:** حال طبق گام اول داریم:

$$\frac{S_{AHDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{k \times ۳m}{\frac{۱}{۲} \times ۴m \times ۴k} = \frac{۳}{۸}$$

**۷** در مثلث شکل زیر $AB = ۶$ ، $AC = ۸$ و $BC = ۱۲$. از نقطهٔ **D** داخل مثلث، پاره‌خط‌های **EF** ، **GH** و **MK** را موازی اضلاع رسم می‌کنیم. اگر اندازهٔ این سه پاره‌خط برابر باشد، اندازهٔ هر کدام از آن‌ها کدام است؟




۱) ۴

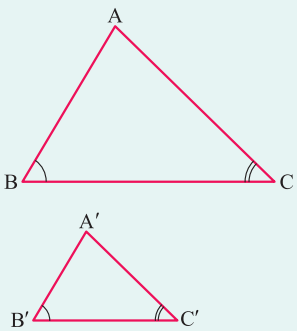
۲) ۵

۳) $\frac{۱۴}{۳}$

۴) $\frac{۱۶}{۳}$

**Hint** مثلث‌های متشابه رو پیدا کن و نسبت تشابه بنویس. کار درمیاد!

**درس Box** هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

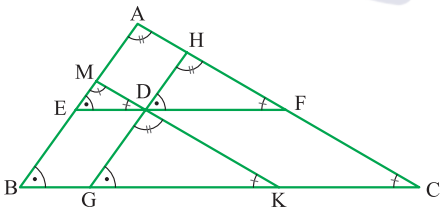



$$(\hat{B} = \hat{B}' , \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'})$$

و نسبت تشابه به صورت زیر است:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

**پاسخ خیلی تشریحی** ✔ **گام اول**: با توجه به قضیهٔ خطوط موازی و مورب می‌توان نتیجه گرفت که زوایای مثلث‌های MED ، GDK و DHF با زوایای مثلث ABC برابرند؛ پس این ۳ مثلث با مثلث ABC متشابه هستند:




**گام دوم**: حال با نوشتن نسبت تشابه‌ها داریم:

$$\frac{ED}{BC} = \frac{MD}{AC} = \frac{ME}{AB} \Rightarrow \frac{DE}{۱۲} = \frac{MD}{۸} = \frac{ME}{۶} = \frac{m}{۲}$$

$$\Rightarrow ED = ۶m , MD = ۴m , ME = ۳m$$

$$\text{متوازی‌الاضلاع } BEDG \Rightarrow GB = ED = ۶m \text{ و}$$

**گام سوم**: با استدلال مشابه نیز داریم:

$$DH = ۳t , HF = ۴t , CK = DF = ۶t$$

$$KD = ۴n , GK = ۶n , GD = ۳n$$

**گام چهارم**: حال با توجه به رابطه‌های به‌دست‌آمده می‌توان نوشت:

$$BC = ۶m + ۶n + ۶t = ۱۲ \Rightarrow m + n + t = ۲ \quad (*)$$

**گام پنجم:** طبق فرض داریم:

$$EF = GH = MK \Rightarrow ۶(m+t) = ۳(n+t) = ۴(m+n)$$

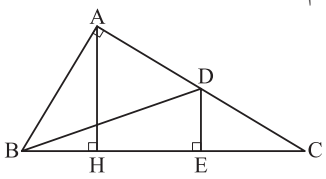
$$\Rightarrow \frac{m+t}{۲} = \frac{n+t}{۴} = \frac{m+n}{۳} = \frac{m+t+n+t+m+n}{۲+۴+۳} = \frac{۲(m+n+t)}{۹}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{m+t}{۲} = \frac{n+t}{۴} = \frac{m+n}{۳} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow m+t = \frac{۸}{۹}$$

$$\Rightarrow EF = ۶(m+t) = ۶ \times \frac{۸}{۹} = \frac{۱۶}{۳}$$

سنجش کلاد

**۸** مطابق شکل، **BD** نیمساز زاویهٔ **ABC** است. اگر $4AB = 3AC$، آن‌گاه حاصل $\frac{HE}{BH}$ کدام است؟




۱) ۱

۲) $\frac{3}{4}$

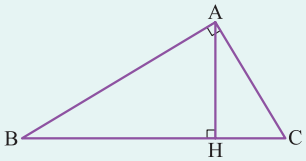
۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{5}{6}$

درس Box

**نتیجه:**

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم، زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند:




۱) $AB^2 = BC.BH$

۲) $AC^2 = BC.CH$

۳) $AB^2 + AC^2 = BC^2$

۴) $AH^2 = BH.CH$

۵) $AH \times BC = AB \times AC$

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** فرض می‌کنیم $AB = 3x$ و $AC = 4x$. در نتیجه در مثلث ABC طبق قضیهٔ فیثاغورس:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow BC = 5x$$

**گام دوم:** طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$BH \times BC = AB^2 \Rightarrow BH \times 5x = 9x^2 \Rightarrow BH = 1/8x$$

**گام سوم:** حال در مثلث‌های ABD و BDE، چون BD نیمساز زاویهٔ B است و وتر BD مشترک این دو مثلث همنهشت‌اند، در نتیجه: $BE = AB = 3x$.

**گام چهارم:** حال نسبت خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{HE}{BH} = \frac{BE - BH}{BH} = \frac{AB - BH}{BH} = \frac{3x - 1/8x}{1/8x} = \frac{1/2}{1/8} = \frac{2}{3}$$

**۹** در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC$، $AB=\sqrt{۲}$ و $AC=۲$ اضلاع زاویهٔ قائمه‌اند. عمودمنصف وتر این مثلث، ضلع $AC$ را در نقطهٔ $M$ قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ $A$ از $BM$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

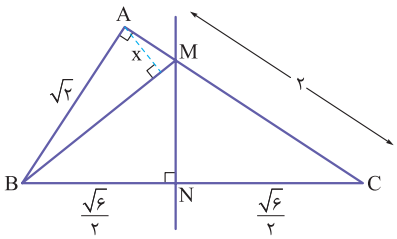
۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴) $\sqrt{۲}-۱$

**Hint** شکل بکش و از روابط طولی استفاده کن!

**پاسخ خیلی تشریحی** **گام اول:** به کمک فیثاغورس $BC=\sqrt{۶}$. حال شکل مقابل را در نظر بگیرید:




**گام دوم:** با توجه به شکل $\overset{\Delta}{NMC}\sim\overset{\Delta}{ABC}$ (زاویهٔ $\hat{C}$ مشترک)، در نتیجه:

$$\frac{MC}{BC}=\frac{NC}{AC}\Rightarrow\frac{MC}{\sqrt{۶}}=\frac{\frac{\sqrt{۶}}{۲}}{۲}\Rightarrow MC=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow AM=AC-MC=\frac{۱}{۲}$$

**گام سوم:** حال در مثلث $ABM$ داریم:

$$BM^{۲}=AB^{۲}+AM^{۲}\Rightarrow BM^{۲}=(\sqrt{۲})^{۲}+(\frac{۱}{۴})=\frac{۹}{۴}\Rightarrow BM=\frac{۳}{۲}$$

$$x\times BM=AM\times AB\Rightarrow x\times\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۲}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

**۱۰** مثلثی به طول اضلاع ۳ و ۲ و $x$، با مثلثی به طول اضلاع ۳ و $y$ و $2x$ متشابه (غیرهمنهشت) است. نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مساحت مثلث کوچک‌تر، کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

---

**Hint** تو حالت‌های مختلف نسبت تشابه بنویس. فقط حواست باشه نسبت تشابه ۱ نشه!

**درس Box** هرگاه اندازهٔ سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشد، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\Rightarrow \overset{\Delta}{A'B'C'}\sim\overset{\Delta}{ABC}$$

**نکته** در دو مثلث $ABC$ و $A'B'C'$ نسبت تشابه $(k)$ برابر نسبت اجزای متناظر است و نسبت مساحت‌ها برابر $k^2$ است.

**پاسخ خیلی تشریحی** **گام اول:** نسبت‌های تشابه را در حالت‌های مختلف بررسی می‌کنیم:

$\frac{2x}{2}=\frac{y}{x}=\frac{3}{3}\Rightarrow k=1$ ✗ همنهشت

$\frac{2x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{3}{x}\Rightarrow k=\sqrt{3}\Rightarrow k^2=3$

$\frac{2x}{3}=\frac{y}{x}=\frac{3}{2}\Rightarrow k=\frac{3}{2}\Rightarrow k^2=\frac{9}{4}$

$\frac{2x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{3}{x}\Rightarrow k=\sqrt{2}\Rightarrow k^2=2$

**گام دوم:** با توجه به گزینه‌ها فقط گزینهٔ (۴) نمی‌تواند نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به کوچک‌تر باشد.

**گول نخوری** ضلع به طول $2x$ نمی‌تواند متناظر ضلع به طول $x$ باشد، چون در این صورت باید طول دو ضلع دیگر مثلث بزرگ ۴ و ۶ باشد که این‌گونه نیست!

**۱** سه ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف، ۱۵ مهره قرار دارد که ۳تای آن‌ها قرمز است. در ظرف دوم، مهرهٔ قرمزی وجود ندارد و در ظرف سوم، نصف مهره‌ها قرمزند. با چشم بسته یک ظرف را انتخاب و یک مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهرهٔ خارج‌شده قرمز است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۳۰}$

## پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

**گام اول: احتمال** انتخاب هر ظرف برابر $\frac{۱}{۳}$ است. احتمال انتخاب قرمز در ظرف اول برابر $\frac{۳}{۱۵}=\frac{۱}{۵}$، از ظرف دوم برابر صفر و از ظرف سوم برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

**گام دوم:** در نتیجه احتمال کل انتخاب مهرهٔ قرمز برابر است با:

$$P(\text{قرمز})=P(\text{ظرف اول})P(\text{قرمز}|\text{ظرف اول})+P(\text{ظرف دوم})P(\text{قرمز}|\text{ظرف دوم})+P(\text{ظرف سوم})P(\text{قرمز}|\text{ظرف سوم})$$

$$=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۳}\times۰+\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۵}+\frac{۱}{۶}=\frac{۷}{۳۰}$$

سنجش کلاد

**۲** یک سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید تاس می‌ریزیم و اگر «پشت» بیاید، دوباره سکه را پرتاب می‌کنیم. این روند را تا جایی ادامه می‌دهیم که مجاز به پرتاب تاس باشیم. با کدام احتمال حداکثر بعد از ۳ پرتاب سکه، عدد تاس مضرب ۳ می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۲۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

## پاسخ: گزینهٔ ۳

**پاسخ خیلی تشریحی ✔** حداکثر ۳ پرتاب به معنای «پرتاب اول» یا «پرتاب دوم» یا «پرتاب سوم» است.

هر کدام را حساب می‌کنیم.

- پرتاب اول: در پرتاب اول باید تاس بریزیم، یعنی سکه «رو» بیاید:

$$\Rightarrow P=\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{روآمدن سکه}}\times\underbrace{\frac{۱}{۳}}_{\text{مضرب ۳ بودن عدد تاس}}=\frac{۱}{۶}$$

- پرتاب دوم: باید پرتاب اول «پشت» بیاید تا دوباره سکه را پرتاب کنیم و پرتاب دوم «رو» بیاید و تاس بریزیم:

$$P=\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{احتمال «پشت»}}\times\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{احتمال «رو»}}\times\underbrace{\frac{۱}{۳}}_{\text{مضرب ۳}}=\frac{۱}{۱۲}$$

- پرتاب سوم: و به طور مشابه برای این پرتاب داریم:

$$P=\underbrace{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}_{\text{احتمال «پشت»}}\times\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{احتمال «رو»}}\times\underbrace{\frac{۱}{۳}}_{\text{مضرب ۳}}=\frac{۱}{۲۴}$$

و در نهایت احتمال کل برابر است با:

$$\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۲۴}=\frac{۷}{۲۴}$$

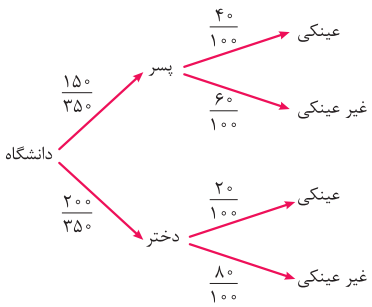
**۳** دانشگاهی ۳۵۰ دانشجو دارد که ۱۵۰ دانشجو پسر و باقی دختر می‌باشند. اگر ٪۴۰ پسران و ۲۰ درصد دختران این دانشگاه عینکی باشند و بخواهیم یک دانشجو به عنوان نماینده انتخاب کنیم، با چه احتمالی این دانشجو دختر هست ولی عینکی نیست؟

۱) $\frac{۲}{۳۵}$ ۲) $\frac{۶}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱۶}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱۸}{۳۵}$

## پاسخ: گزینهٔ ۳

**Hint** در افراز کردن یک مجموعه به دو زیرمجموعه، اعضای مجموعهٔ اصلی باید عضو یکی از این دو زیرمجموعه باشند.

**پاسخ خیلی تشریحی** نمودار درختی احتمال شرطی مورد نظر را به صورت زیر رسم می‌کنیم:




$$\Rightarrow P(\text{دختر بودن و عینکی نبودن}) = P(\text{دختر بودن}) \times P(\text{دختر بودن و عینکی نبودن})$$

$$= \frac{۲۰۰}{۳۵۰} \times \frac{۸۰}{۱۰۰} = \frac{۱۶}{۳۵}$$

**۴** از هر یک از ۳۱ استان کشور برای شرکت در مسابقات، ۶ نفر بالای ۲۰ سال شرکت کرده‌اند که تعداد شرکت‌کنندگان بالای ۳۰ سال هر استان ۲ برابر تعداد شرکت‌کنندگان بین ۲۰ تا ۳۰ سال است. اگر قرار باشد فقط یک نفر قهرمان این مسابقات شود، با چه احتمالی از استان کهگیلویه و بویراحمد است و سن بین ۲۰ تا ۳۰ سال دارد؟

۱) $\frac{۱}{۹۳}$ ۲) $\frac{۲}{۹۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳۱}$

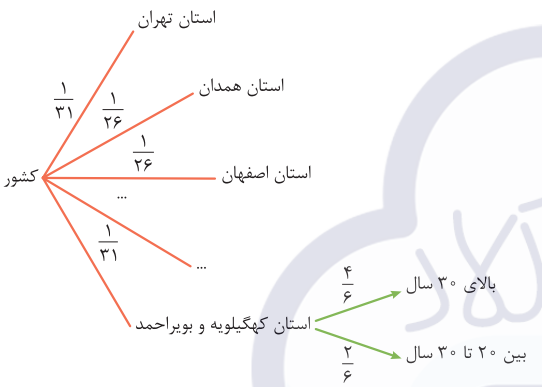
## پاسخ: گزینهٔ ۱

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** تعداد شرکت‌کننده بین ۲۰ تا ۳۰ سال هر استان: $۶\times\frac{۱}{۳}=۲$

تعداد شرکت‌کننده بالای ۳۰ سال هر استان هم‌چنین: $۶-۲=۴$

**گام دوم:** کشور به ۳۱ استان افراز شده، پس احتمال انتخاب از هر استان $\frac{۱}{۳۱}$ می‌باشد. هم‌چنین هر استان دارای ۶ شرکت‌کننده است که ۲ نفر آن‌ها بین ۲۰ تا ۳۰ سال دارند و ۴ نفر آن‌ها بالای ۳۰ سال سن دارند. با توجه به این توضیحات می‌توان نمودار زیر را رسم کرد:




و داریم:

$$P(\text{استان کهگیلویه و بویراحمد و بین ۲۰ تا ۳۰ سال})=\frac{۱}{۳۱}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۲}{۱۸۶}=\frac{۱}{۹۳}$$

**۵** در ظرفی ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های انتخابی عددی اول است یا اختلاف آن‌ها ۲ است؟

۱) ۰/۹ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۷ ۴) ۰/۸

## پاسخ: گزینهٔ ۴

**پاسخ خیلی تشریحی ✔**

**گام اول:** در کل $n(S)=\binom{5}{2}=10$ انتخاب داریم که در هر انتخاب مجموع و تفاضل را حساب می‌کنیم:

| | $\{1,2\}$ | $\{1,3\}$ | $\{1,4\}$ | $\{1,5\}$ | $\{2,3\}$ | $\{2,4\}$ | $\{2,5\}$ | $\{3,4\}$ | $\{3,5\}$ | $\{4,5\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| مجموع | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۵ | ۶ | ۷ | ۷ | ۸ | ۹ |
| اختلاف | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۱ | ۲ | ۱ |

**گام دوم:** فقط حالت‌های $\{5,1\}$ و $\{5,4\}$ نامطلوب هستند که نه مجموعشان عددی اول است و نه اختلافشان برابر ۲ است.

$$\Rightarrow n(A)=10-2=8$$

پس احتمال برابر است با:

$$P(A)=\frac{8}{10}=0/8$$

**۶** عدد $a$ با پرتاب تاس انتخاب می‌شود. با کدام احتمال جواب $x$ از معادلهٔ $ax + ۳ = a$ عددی مثبت است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

## پاسخ: گزینهٔ ۲

**پاسخ خیلی تشریحی ✔** **گام اول:** ابتدا معادله را حل می‌کنیم:

$$ax = a - ۳ \Rightarrow x = \frac{a-۳}{a}$$

**گام دوم:** سپس حدود $a$ را به دست می‌آوریم تا $x$ مثبت شود:

$$\frac{a-۳}{a} > ۰ \xrightarrow{\text{خارج ریشه‌ها}} a < ۰ \text{ یا } a > ۳$$

**گام سوم:** در بین اعداد تاس، فقط $\{۴ , ۵ , ۶\}$ است که قابل قبول است و در مجموعهٔ بالا عضویت دارد؛ پس احتمال برابر است با $\frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$.

**۷** با ارقام ۱، ۲، ۳، ۵ و ۸ چند عدد طبیعی زوج بدون رقم تکراری و بیشتر از ۲۴۰ می‌توان ساخت؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۱۵ ۳) ۱۱۲ ۴) ۱۱۸

## پاسخ: گزینهٔ ۳

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** تمام اعداد چهاررقمی و پنج‌رقمی قابل قبول‌اند:

۴رقمی‌ها: $۴\times۳\times۲\times\underset{\{۸,۲\}}{\underbrace{۲}}=۴۸$

۵رقمی‌ها: $۴\times۳\times۲\times۱\times\underset{\{۲,۸\}}{\underbrace{۲}}=۴۸$

**گام دوم:** در بین اعداد سه‌رقمی، تمام صدگان‌های ۳، ۵ و ۸ قابل قبول‌اند:

$$۳\times۳\times\underset{\{۲\}}{\underbrace{۱}}=۹$$

$$۲\times۳\times\underset{\{۸\}}{\underbrace{۱}}=۶$$

اگر صدگان برابر ۲ باشد، قطعاً یکان برابر ۸ است و دهگان باید ۵ باشد، یعنی فقط عدد ۲۵۸ در این حالت قابل قبول است.

**گام سوم:** در نهایت طبق اصل جمع تعداد اعداد مطلوب برابر است با:

$$۴۸+۴۸+۹+۶+۱=۱۱۲$$

**۸** چند عدد سیزده‌رقمی با ارقام ۴ و ۵ می‌توان نوشت، به طوری که بر ۱۵ بخش‌پذیر باشند؟

۱) ۱۳۵۳ ۲) ۱۲۹۹

۳) ۱۳۶۵ ۴) ۱۳۶۶

## پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

**گام اول:** عدد مورد نظر باید بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد، یعنی رقم یکان آن ۵ باشد و مجموع همهٔ ارقام بر ۳ بخش‌پذیر باشد:

$$\underbrace{---\dots-}_{\text{۴ تا } n,\ (۱۲-n) \text{ تا } ۵}\ \underset{\{۵\}}{\downarrow}\ ۱$$

**گام دوم:** مجموع ارقام عدد مورد نظر برابر است با:

$$۵+۵(۱۲-n)+۴(n)=۶۵-n \quad ; \quad ۰\le n\le ۱۲$$

باید عدد $۶۵-n$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد. به ازای $n\in\{۲,۵,۸,۱۱\}$ عدد $۶۵-n$ بر ۳ بخش‌پذیر خواهد بود.

**گام سوم:** حال تعداد کل اعداد مورد نظر برابر است با:

$$\binom{۱۲}{۲}+\binom{۱۲}{۵}+\binom{۱۲}{۸}+\binom{۱۲}{۱۱}=\binom{۱۲}{۱}+\binom{۱۲}{۲}+\binom{۱۲}{۴}+\binom{۱۲}{۵}$$

$$=۱۲+۶۶+۴۹۵+۷۹۲=۱۳۶۵$$

**۹** متغیرهای «نوع یک متغیر در علم آمار» و «درصد کسب‌شدهٔ یک دانش‌آموز در یک آزمون تستی» چگونه‌اند؟

۱) کیفی ترتیبی، کمّی پیوسته

۲) کیفی ترتیبی، کمّی گسسته

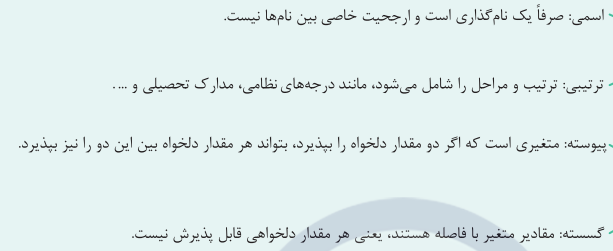
۳) کیفی اسمی، کمّی پیوسته

۴) کیفی اسمی، کمّی گسسته

---

## پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box




**پاسخ خیلی تشریحی** ✔ طبق درس‌باکس، «نوع یک متغیر در علم آمار» کیفی اسمی و «درصد کسب‌شده ...» کمّی گسسته است.

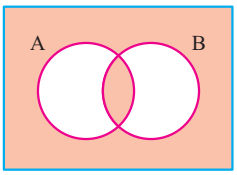
**۱۰** اگر $A$ و $B$ دو مجموعهٔ ناتهی باشند، حاصل $(A\cup B)' - ((A-B)\cup(B-A))'$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) $A\cap B$ ۲) $A'\cap B'$ ۳) $A'\cup B'$ ۴) $\varnothing$

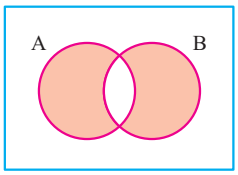
## پاسخ: گزینهٔ ۱

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** بهتر است از نمودار ون استفاده کنیم. پس مرحله به مرحله، رسم می‌کنیم:

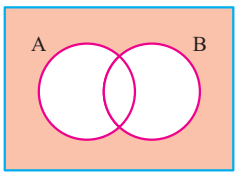



$((A-B)\cup(B-A))'$

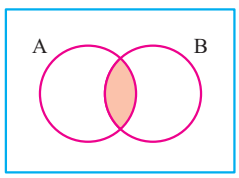



$(A-B)\cup(B-A)$

**گام دوم:** مجموعهٔ $(A\cup B)'$ را هم مشخص می‌کنیم:




**گام سوم:** حالا از مجموعهٔ گام اول، مجموعهٔ گام دوم را برمی‌داریم. چیزی که می‌ماند:




که همان $A\cap B$ است.

**۱۱** اگر $n(A\cap B)=\frac{n(A-B)}{۳}=\frac{n(A\cup B)}{۵}$ و $n(B-A)=۱۰$، آن‌گاه $n(A-B)$ کدام است؟

۱) ۳۰

۲) ۲۵

۳) ۲۰

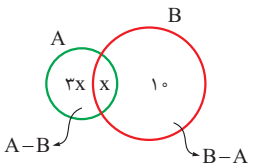
۴) ۱۵

**مشاوره** در چنین سؤالاتی که تعداد اعضای مجموعه‌ها معلوم یا مجهول مسئله است، بهتر است از یکی از مجموعه‌ها شروع کنیم، مثلاً آن را x در نظر بگیریم و سپس با استفاده از اطلاعات مسئله همهٔ مجموعه‌ها را بر حسب آن x بنویسیم. بهتر است از اشتراک مجموعه‌ها شروع کنیم.

## پاسخ: گزینهٔ ۱

**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** $n(A\cap B)$ را x در نظر می‌گیریم و براساس آن نمودار ون را تکمیل می‌کنیم:




دقت کنید که طبق فرض $n(A\cap B)=\frac{n(A-B)}{۳}$ یا $n(A-B)=۳n(A\cap B)$.

**گام دوم:** حالا از رابطهٔ $n(A\cup B)=۵n(A\cap B)$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} n(A\cup B)=۴x+۱۰ \\ n(A\cup B)=۵n(A\cap B) \end{cases} \Rightarrow ۴x+۱۰=۵x \Rightarrow x=۱۰$$

در نتیجه $n(A-B)=۳x=۳۰$ خواهد شد.

۱- اگر دامنه تعریف تابع $f(x)=\sqrt{(3-m)x^2+2mx-(m+2)}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد، حدود $m$ کدام است؟

۱) $m\in[-6,-3]$ ۲) $m\in(-\infty,3)$ ۳) $m\in(-\infty,-6]$ ۴) $m\in(6,+\infty)$

**پاسخ: گزینهٔ ۳** (متوسط ـ خط به خط ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۵۲ تا ۵۳)

برای آن‌که $D_f=\mathbb{R}$ باید برای هر عدد حقیقی $x$ شرط $(3-m)x^2+2mx-(m+2)\geq 0$ برقرار باشد یعنی:

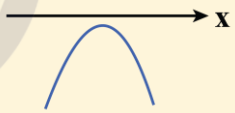
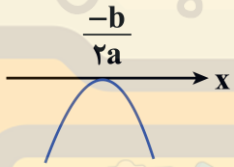
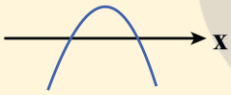
$$\Delta\leq 0\Rightarrow m^2+(3-m)(m+2)\leq 0\Rightarrow m^2-m^2+m+6\leq 0\Rightarrow m\leq -6$$

$$a>0\Rightarrow 3-m>0\Rightarrow m<3$$

اشتراک دو شرط است. یعنی $m\leq -6$

**ریشه‌های سهمی**

$a<0$

| $\Delta<0$ | $\Delta=0$ | $\Delta>0$ |
|---|---|---|
|  |  |  |
| تابع درجه دوم محور $x$ ها را قطع نمی‌کند.<br>تابع درجه دوم همواره پایین محور $x$ ها است.<br>تابع درجه دوم همواره منفی است. | تابع درجه دوم پایین محور $x$ ها و بر آن مماس است.<br>معادله درجه دوم یک ریشه مضاعف $x=-\frac{b}{2a}$ دارد. | تابع درجه دوم محور $x$ ها را در دو نقطه قطع می‌کند.<br>معادله درجه دوم دو ریشه ساده دارد. |

**توجه!**

با توجه به جدول فوق می‌توان نتیجه گرفت شرط این‌که عبارت درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ همواره منفی باشد این است که $a<0$ و $\Delta<0$ باشد.

۲- در مجموعه جواب نامعادلهٔ $-۴<\frac{۳x+۱}{x-۲}<۲$ چند عدد صحیح یافت می‌شود؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۶

**پاسخ: گزینهٔ ۱** (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۸۶ تا ۹۱)

برای این تست ۳ روش داریم:

**روش اول**

$$\frac{۳x+۱}{x-۲}<۲ \Rightarrow \frac{۳x+۱}{x-۲}-۲<۰ \Rightarrow \frac{x+۵}{x-۲}<۰ \Rightarrow -۵<x<۲$$

$$-۴<\frac{۳x+۱}{x-۲} \Rightarrow \frac{۳x+۱}{x-۲}+۴>۰ \Rightarrow \frac{۷x-۷}{x-۲}>۰ \Rightarrow x>۲ \text{ یا } x<۱$$

پس جواب نهایی $-۵<x<۱$ قابل قبول است.

اعداد صحیح در مجموعه جواب $x=-۴,-۳,-۲,-۱,۰$ هستند، یعنی ۵ عدد صحیح در مجموعه جواب واقع شده است.

**روش دوم**

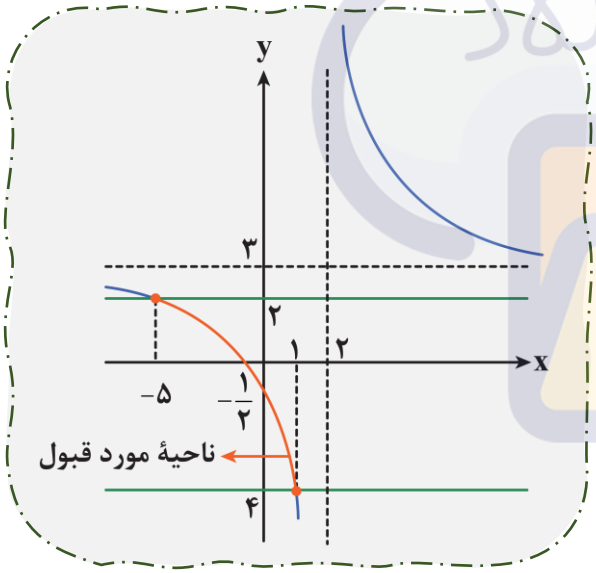
$$-۳<\frac{۳x+۱}{x-۲}+۱<۳ \Rightarrow \left|\frac{۴x-۱}{x-۲}\right|<۳ \Rightarrow |۴x-۱|<۳|x-۲| \Rightarrow |۴x-۱|<|۳x-۶|$$

$$(۴x-۱)^۲<(۳x-۶)^۲ \Rightarrow (۴x-۱)^۲-(۳x-۶)^۲<۰$$

$$(۴x-۱+۳x-۶)(۴x-۱-۳x+۶)<۰ \Rightarrow (۷x-۷)(x+۵)<۰ \Rightarrow -۵<x<۱$$

**روش سوم**

با رسم تابع هموگرافیک داریم:




حال با رسم $y=-۴$ و $y=۲$ داریم:

$$\frac{۳x+۱}{x-۲}=۲ \Rightarrow ۳x+۱=۲x-۴ \Rightarrow x=-۵$$

$$\frac{۳x+۱}{x-۲}=-۴ \Rightarrow ۳x+۱=-۴x+۸ \Rightarrow x=۱$$

در نتیجه بازهٔ جواب $(-۵,۱)$ می‌شود.

۳- جدول تعیین علامت $P(x)=(۲a-۶)x^۲+(۳a-۱۲)x+b$ به صورت مقابل است. مقدار $۲b-۳a$ چه عددی است؟

| x | $-۳$ |
|---|---|
| P(x) | + ۰ − |

۱) ۹

۲) $-۱۸$

۳) $-۹$

۴) $-۲۷$

**پاسخ: گزینهٔ ۴** (متوسط ـ خط به خط ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۸۶)

با توجه به جدول که نمایانگر فقط یک ریشه ساده برای $P(x)=0$ است متوجه می‌شویم که $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه اول است به طوری‌که ریشه آن $x=-3$ است، یعنی:

$$2a-6=0 \Rightarrow a=3 \Rightarrow P(x)=+(3a-12)x+b$$

$$P(x)=+(9-12)x+b=-3x+b$$

$$P(x)=0 \Rightarrow x=+\frac{b}{3} \Rightarrow +\frac{b}{3}=-3 \Rightarrow b=-9$$

| x | $-3$ | |
|---|---|---|
| P(x) | + | 0 − |

$$P(x)=-3x-9$$

$$2b-3a=-18-9=-27$$

پس $b=-9$ و $a=3$ قابل قبول است.

**۴- اگر معادله $\frac{x-8}{x^2+2x}-\frac{k}{x+2}=\frac{2x-1}{x}$ فقط یک ریشه داشته باشد، چند مقدار مختلف برای k به دست می‌آید؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینهٔ ۳** (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۹ تا ۲۱)

ابتدا معادله را به صورت یک معادله درجه دوم تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{x-8-kx}{(x^2+2x)}=\frac{2x-1}{x} \xrightarrow{x\neq 0} \frac{x-8-kx}{x+2}=2x-1$$

$$\Rightarrow 2x^2+4x-x-2=x-8-kx \Rightarrow 2x^2+(2+k)x+6=0$$

اگر معادله به دست آمده دارای ریشه مضاعف باشد حالت قابل قبولی از جواب است: (دقت کنید در این حالت ریشهٔ مضاعف با هیچکدام از ریشه‌های مخرج برابر نیست)

$$\Delta=0 \Rightarrow (2+k)^2-48=0 \Rightarrow$$ ۲ مقدار برای k به دست می‌آید.

حالتی دیگر می‌ماند که معادله $2x^2+(k+2)x+6=0$ دارای ریشه $x=0$ یا $x=-2$ باشد، اگر $x=0$ که امکان‌پذیر نیست اما اگر $x=-2$ ریشه آن باشد.

$$8-2(k+2)+6=0 \Rightarrow k+2=7 \Rightarrow k=5 \Rightarrow 2x^2+7x+6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \text{ غ ق ق} \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

این مقدار k به دست آمده با مقادیر به دست آمده قبلی متمایز است، پس کلاً ۳ مقدار مختلف برای k به دست می‌آید که معادله فقط یک ریشه داشته باشد.

### معادلات گویا

به معادله‌های شامل عبارت‌های کسری که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشد، **معادله‌های گویا** می‌گوییم.

معادله‌های زیر نمونه‌ای از معادلات گویا هستند.

- $\frac{x^2+5}{x^2+1}+\frac{5}{x^2+2}=3$
- $\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x}=\frac{4x-4}{x^2-4}$

**- آقا! + بله؟ - یه معادله گویا رو چطوری باید حلش کنیم؟**

برای حل معادله‌های شامل عبارت‌های گویا مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

ابتدا مخرج هر یک از کسرها را (در صورت لزوم) به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم. (چندجمله‌ای)

طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج کسرها ضرب می‌کنیم تا معادله از حالت کسری خارج شود.

عبارت جبری به دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و معادله حاصل شده (معمولاً درجه ۲) را حل می‌کنیم.

در نهایت جواب‌های به دست آمده را در معادله اصلی امتحان می‌کنیم.

**توجه!**

جواب‌های به دست آمده زمانی قابل قبول خواهند بود که اولاً مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر نکنند و ثانیاً این جواب‌ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت داشته باشند. (- قسمت دوم رو متوجه نشدم! +یعنی این‌که مثلاً اگر قرار باشه با حل یه معادله طول یک شکل رو محاسبه کنیم، اندازه این طول رو منفی در نیاریم)

ماز

**۵- در یک مستطیل به عرض $\sqrt{۵}$، طول ۳ برابر عرض است. مقدار k را به عرض مستطیل اضافه کرده و k واحد از طول آن کم می‌کنیم. مستطیل به مستطیل طلایی تبدیل می‌شود. حداقل مقدار k کدام است؟**

۱) $\frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۵}+۱)}{\sqrt{۵}+۳}$ ۲) $\frac{۵(\sqrt{۵}-۱)}{۳+\sqrt{۵}}$ ۳) $\frac{۳(\sqrt{۵}-۱)}{\sqrt{۵}+۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}(\sqrt{۳}-۱)}{۵+\sqrt{۳}}$

**پاسخ: گزینهٔ ۲** (سخت ـ ترکیبی / محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۹ تا ۲۱)

یک مستطیل به شرطی طلایی است که نسبت طول به عرض آن $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ باشد.

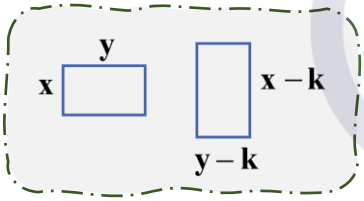
مسأله ۲ حالت دارد.

**حالت اول**

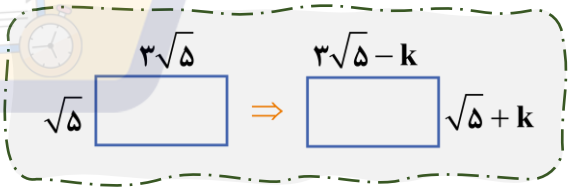
وقتی k به عرض اضافه کرده و k واحد از طول کم می‌کنیم همچنان اضلاع جدید همان طول و عرض بمانند که در این حالت مقدار حداقلی برای k به دست می‌آید.

**حالت دوم**

آن است که پس از تغییر آنقدر k را افزایش دهیم تا عرض مستطیل اولیه به طول مستطیل دوم تبدیل شود یعنی شکل زیر حاصل شود:




به همین جهت حداقل مقدار k را خواسته است. پس طبق حالت اول پیش می‌رویم:

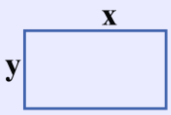



$$\frac{۳\sqrt{۵}-k}{\sqrt{۵}+k}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow ۶\sqrt{۵}-۲k=\sqrt{۵}+۵+k+k\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow ۵\sqrt{۵}-۵=k(۳+\sqrt{۵})\Rightarrow k=\frac{۵(\sqrt{۵}-۱)}{۳+\sqrt{۵}}$$

**نسبت طلایی**

اگر در یک مستطیل با طول x و عرض y، رابطه زیر برقرار باشد در این صورت به آن مستطیل، مستطیل طلایی و به نسبت $\frac{x}{y}$ نسبت طلایی می‌گوییم. که مقدار آن برابر $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ (عدد طلایی) است.




$$\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}$$

ماز

۶- دو فرد A و B با هم کاری را در طی ۱۵ روز تمام می‌کنند. پس از ۶ روز کار مشترک، A را حذف می‌کنیم و B به تنهایی در ۱۵ روز تمام کار را به پایان می‌رساند. اگر بعد از ۶ روز کار مشترک، B را حذف می‌کردیم، A به تنهایی مابقی کار را چند روزه تمام می‌کرد؟

۱) ۳۲/۵ ۲) ۳۷/۵ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۲۷/۵

**پاسخ: گزینهٔ ۳** (سخت ـ مفهومی / ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۹ تا ۲۲)

فرض کنیم A به تنهایی در طی a روز و B به تنهایی در طی b روز کل کار را تمام کنند، در این صورت: $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}=\frac{۱}{۱۵}$

زیرا A در هر روز $\frac{۱}{a}$ از کل کار و B به تنهایی در هر روز $\frac{۱}{b}$ کل کار را تمام می‌کند.

حال ادامه سوال:

$$\underbrace{\frac{۶}{a}+\frac{۶}{b}}_{\text{۶ روز کار مشترک}}+\frac{۱۵}{b}=۱$$

↘ B، ۱۵ روز به تنهایی کار کند

$$\Rightarrow \frac{۶}{۱۵}+\frac{۱۵}{b}=۱ \Rightarrow \frac{۱۵}{b}=\frac{۹}{۱۵} \Rightarrow b=\frac{۱۵\times ۱۵}{۹}=۲۵$$

یعنی b به تنهایی ۲۵ روزه کار را تمام می‌کرد.

$$\frac{۱}{b}+\frac{۱}{a}=\frac{۱}{۱۵}$$

$$\frac{۱}{a}=\frac{۱}{۱۵}-\frac{۱}{۲۵}=\frac{۵-۳}{۷۵} \Rightarrow a=\frac{۷۵}{۲}=۳۷/۵$$

یعنی a به تنهایی ۳۷/۵ روزه کار را تمام می‌کند.

$$\frac{۶}{a}+\frac{۶}{b}+\frac{n}{a}=۱ \Rightarrow \frac{۶}{۱۵}+\frac{n}{\frac{۷۵}{۲}}=۱ \Rightarrow \frac{۲n}{\cancel{۷۵}^{۵}}=\frac{۹}{\cancel{۱۵}}$$

پس A مابقی کار را در طی ۲۲/۵ روز تمام می‌کند.

$$n=\frac{۴۵}{۲}=۲۲/۵$$

**مسائل مربوط به موازی‌کاری**

اگر شخص A کاری را به تنهایی در x روز (ساعت) و شخص B همان کار را به تنهایی در y روز (ساعت) انجام دهند، در این صورت:

- شخص A به تنهایی در هر روز (ساعت)، $\frac{۱}{x}$ از کل کار را انجام می‌دهد.
- شخص B به تنهایی در هر روز (ساعت)، $\frac{۱}{y}$ از کل کار را انجام می‌دهد.
- اگر شخص A و شخص B هر دو با هم کار کنند در هر روز (ساعت)، $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$ از کل کار را انجام می‌دهند.

۷- ۴۰۰ کیلوگرم آب‌نمک با غلظت ۲۵ درصد را با ۸۰ کیلوگرم نمک خالص در یک ظرف می‌ریزیم. چقدر به آب آن اضافه کنیم تا غلظت محلول نهایی ۱۰ درصد شود؟

۱) ۴۸۰ ۲) ۱۸۰۰ ۳) ۱۳۲۰ ۴) ۱۵۶۰

**پاسخ: گزینهٔ ۳** (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۹ تا ۲۲)

در ابتدا کل نمک موجود در محلول را یافته تا بتوانیم غلظت نهایی را به دست آوریم.

$$\text{نمک موجود} = ۴۰۰\times\frac{۲۵}{۱۰۰}+۸۰=\text{نمک خالص}\ ۱۸۰$$

$$\text{غلظت نهایی}=\frac{۱۰}{۱۰۰}=\frac{\text{نمک خالص}}{\text{کل محلول}}=\frac{۱۸۰}{۴۰۰+۸۰+x}$$

↓ میزان آب اضافه شده

$$\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱۸۰}{۴۸۰+x} \Rightarrow ۴۸۰+x=۱۸۰۰ \Rightarrow x=۱۸۰۰-۴۸۰ \Rightarrow x=۱۳۲۰\text{kg}$$

### مسائل مربوط به غلظت

برای حل این مسائل بهتر است نکته‌های زیر را از درس شیمی به خاطر داشته باشیم:

**غلظت** یک محلول از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{غلظت یک محلول} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}}$$

اگر $x$ گرم از یک ماده با غلظت $m$ و $y$ گرم از ماده دیگر با غلظت $n$ را با هم مخلوط کنیم، غلظت مخلوط برابر است با:

$$\text{غلظت مخلوط} = \frac{xm + yn}{x + y}$$

**۸- معادله $\sqrt{۱+x} = x^۲ - ۱$ دارای چند جواب است؟**

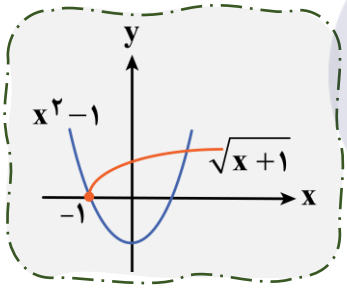
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

**پاسخ: گزینهٔ ۲** (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۲۳)

یکی از روش‌هایی که می‌توان تعداد ریشه‌های یک معادله را پیدا کرد، آن است که نمودار تابع را رسم کنیم و تعداد نقاط تلاقی آن را با محور $x$ها مشخص کنیم و یا آن‌که نمودار $f$ و نمودار $g$ را رسم کنیم. تعداد نقاط تلاقی نمودار $f$ و نمودار $g$، برابر تعداد ریشه‌های $f(x) - g(x) = ۰$ است.

پس برای یافتن تعداد ریشه داریم: $\sqrt{۱+x} = x^۲ - ۱ \Rightarrow ۱ + \sqrt{۱+x} = x^۲$

نمودار توابع $y = \sqrt{۱+x}$ و $y = x^۲ - ۱$ را رسم می‌کنیم. تعداد تلاقی آن‌ها تعداد ریشه‌های معادله موردنظر است. دو تابع در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، پس معادله دارای ۲ ریشه است.




### معادله‌های رادیکالی (گنگ)

به معادله‌هایی که در آن‌ها مجهول (متغیر) زیر رادیکال قرار داشته باشد، معادله‌های رادیکالی (گنگ) می‌گوییم.

### یه نمونه باحال

معادله‌های زیر چند نمونه از معادلات رادیکالی هستند.

- $\frac{۵}{\sqrt{x}+۲} = ۲ - \frac{۱}{\sqrt{x}-۲}$
- $\sqrt{x+۳} + \sqrt{۳x+۱} = ۴$
- $\sqrt{x+۲} = x - ۴$

حال سوال اینجاست که یه معادله رادیکالی رو چطوری باید حلش کنیم؟ برای حل یک معادله رادیکالی باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) یکی از رادیکال‌ها را در یک طرف معادله نگه می‌داریم و مابقی جمله‌ها را به طرف دیگر معادله منتقل می‌کنیم.

۲) طرفین معادله را به توان مناسب می‌رسانیم. (معمولاً طرفین را به توان ۲ می‌رسونیم)

**توجه!**

اگر با به توان رساندن طرفین معادله، مجدداً در معادله عبارت رادیکالی حضور داشته باشد سعی می‌کنیم که با تکرار مراحل ۱ و ۲، کل معادله را از حالت رادیکالی خارج کنیم.

۳) معادله به دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و آن را حل می‌کنیم و جواب (یا جواب‌های) معادله را به دست می‌آوریم.

۴) جواب(های) به دست آمده را در معادله اصلی آزمایش می‌کنیم و جواب‌هایی را قبول می‌کنیم که اولاً در دامنه تعریف متغیر معادله قرار داشته باشند و ثانیاً در معادله اصلی صدق کنند.

۹- جواب معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{x-a}=a$ یک عدد طبیعی دو رقمی است. حداقل مقدار طبیعی $a$ چه عددی است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۰

**پاسخ: گزینهٔ ۳** (سخت ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۲۲ تا ۲۴)

اولاً باید توجه داشته باشیم معادله کلاً یک جواب دارد.

ثانیاً با تغییر $a$ جواب معادله عوض می‌شود. پس برای حل آن داریم:

$$\sqrt{x-a}=a-\sqrt{x} \Rightarrow x-a=a^2+x-2a\sqrt{x}$$

$$a+a^2=2a\sqrt{x}$$

$$\text{چون } a \text{ طبیعی است} \Rightarrow a\neq 0 \Rightarrow 1+a=2\sqrt{x} \Rightarrow x=(\frac{1+a}{2})^2$$

با توجه به رابطه به دست آمده چون $x$ عدد طبیعی و $a$ هم عدد طبیعی است، پس $x$ مربع کامل است و $a$ عدد طبیعی فرد است.

مثلاً $a=5$، آن‌گاه $x=9$ یا $a=7$، آن‌گاه $x=16$.

با توجه به آن‌که $x$ یک عدد ۲ رقمی است، پس حداقل مقدار $a$ باید $a=7$ باشد.

۱۰- اگر معادلهٔ $\sqrt{ax+\sqrt{2-x}}=\sqrt{x-2}+\sqrt{4x+1}$ دارای جواب باشد، مقدار $a$ کدام است؟

۱) ۲/۲۵ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۴/۵

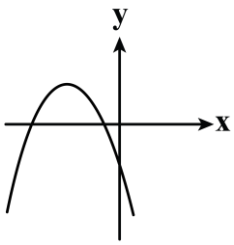
**پاسخ: گزینهٔ ۴** (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۲۲ تا ۲۴)

اولاً وجود $x-2$ و $2-x$ زیر رادیکال با فرجه ۲ به این معناست که فقط $x=2$ قابل قبول است.

ثانیاً اگر $x=2$ را در معادله قرار دهیم باید تساوی برقرار باشد، پس:

$$\sqrt{9}+0=\sqrt{2a+0} \Rightarrow 2a=9 \Rightarrow a=4/5$$

۱- نمودار سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ به شکل مقابل است. کدام گزینه همواره مثبت است؟




۱) $ab+c$
۲) $ac-b$
۳) $a(bc-۱)$
۴) $abc+۱$

**پاسخ: گزینهٔ ۲** (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۷ و ۱۸ ـ ۱۱۰۱)

با توجه به این‌که سهمی دارای max است، پس $a<۰$ و چون $f(۰)>۰$، پس $c>۰$ می‌باشد. از طرفی $b>۰$ است، زیرا شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطه تلاقی با محور عرض‌ها منفی است. با توجه به این‌که $a,b,c>۰$ است، $ac-b$ حتماً مثبت است.

۲- اگر $\alpha$ و $\beta$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۴=۰$ باشند، حاصل $A=\frac{\alpha}{\beta(۲-\alpha)}+\frac{\beta}{\alpha(۲-\beta)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینهٔ ۲** (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۱۰۱)

با توجه به معادلهٔ داده شده:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=۲\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۲-\beta\\ \beta=۲-\alpha\end{cases}\qquad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۴$$

در نتیجه:

$$A=\frac{\alpha}{\beta(۲-\alpha)}+\frac{\beta}{\alpha(۲-\beta)}=\frac{\alpha}{\beta\times\beta}+\frac{\beta}{\alpha\times\alpha}$$

$$=\frac{\alpha}{\beta^۲}+\frac{\beta}{\alpha^۲}=\frac{\alpha^۳+\beta^۳}{(\alpha\beta)^۲}=\frac{S^۳-۳PS}{P^۲}=\frac{۲^۳-۳(-۴)(۲)}{(-۴)^۲}=\frac{۸+۲۴}{۱۶}=\frac{۳۲}{۱۶}=۲$$

## ایستگاه ریشه‌ها و روابط بین آن‌ها

| رابطه | حاصل برحسب S و P |
|---|---|
| $\alpha^2+\beta^2$ | $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P$ |
| $\alpha^3+\beta^3$ | $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3PS$ |
| $\alpha^4+\beta^4$ | $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=(S^2-2P)^2-2P^2$ |
| $\alpha^6+\beta^6$ | $\alpha^6+\beta^6=(\alpha^2+\beta^2)^3-3(\alpha\beta)^2(\alpha^2+\beta^2)=(S^2-2P)^3-3P^2(S^2-2P)$ |
| $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$ | $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}=\frac{S^2-2P}{P^2}$ |
| $\lvert\alpha-\beta\rvert$ | $\lvert\alpha-\beta\rvert=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$ |
| $\lvert\alpha^2-\beta^2\rvert$ | $\lvert\alpha^2-\beta^2\rvert=\lvert(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\rvert=\lvert\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}\times S\rvert$ |
| $\lvert\alpha^3-\beta^3\rvert$ | $\lvert\alpha^3-\beta^3\rvert=\lvert(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)\rvert=\lvert\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}(S^2-P)\rvert$ |
| $\lvert\alpha^4-\beta^4\rvert$ | $\lvert\alpha^4-\beta^4\rvert=\lvert(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)\rvert=\lvert\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}(S)(S^2-2P)\rvert$ |
| $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ | $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}\quad(\alpha,\beta>0)$ |
| $\lvert\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\rvert$ | $\lvert\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\rvert=\sqrt{\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{S-2\sqrt{P}}\quad(\alpha,\beta>0)$ |
| $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$ | $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{S}{\sqrt{P}}$ |

**۳- $\alpha$ و $3\beta$ جواب‌های معادلهٔ $x^2-ax-b=0$، ۳ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+ax-18=0$ می‌باشند. مقدار $\frac{b}{\alpha}$ کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

**پاسخ: گزینهٔ ۴** (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۲ و ۱۳ ـ ۱۱۰۱)

با توجه به این‌که ۳ و $\beta$ ریشه‌های $3x^2+ax-18=0$ هستند، پس $x=3$ در معادله صدق می‌کند:

$$27+3a-18=0\Rightarrow 3a=-9\Rightarrow a=-3$$

$$\Rightarrow 3x^2-3x-18=0\Rightarrow x^2-x-6=0\Rightarrow (x-3)(x+2)=0\Rightarrow \beta=-2\Rightarrow 3\beta=-6$$

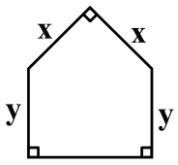
از طرفی $\alpha$ و $-6$ ریشه‌های $x^2+3x-b=0$ هستند، یعنی $x=-6$ در معادله صدق می‌کند:

$$36-18-b=0\Rightarrow b=18$$

$$x^2+3x-18=0\Rightarrow (x+6)(x-3)=0\Rightarrow \alpha=3$$

$$\begin{cases}\alpha=3\\ b=18\end{cases}\Rightarrow \frac{b}{\alpha}=\frac{18}{3}=6$$

۴- پنجره‌ای مطابق شکل با بیشترین نوردهی می‌خواهیم بسازیم. اگر محیط پنجره ۱۶ باشد، مقدار x کدام است؟




۱) $\frac{۸\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+۱}$

۲) $\frac{۸\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}+۱}$

۳) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}+۱}$

۴) $\frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+۱}$

**پاسخ: گزینهٔ ۲** (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۱۰۱)

با توجه به این‌که کف پنجره، وتر مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس اندازهٔ آن $x\sqrt{۲}$ است.در نتیجه:

$$x\sqrt{۲}+۲x+۲y=۱۶ \Rightarrow y=\frac{۱۶-۲x-x\sqrt{۲}}{۲}$$

وقتی صحبت از بیشترین نوردهی است یعنی مساحت باید بیشترین مقدار ممکن باشد:

$$S=\sqrt{۲}xy+\frac{۱}{۲}x^۲=\sqrt{۲}x(\frac{۱۶-۲x-x\sqrt{۲}}{۲})+\frac{۱}{۲}x^۲$$

$$S(x)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱۶x-۲x^۲-\sqrt{۲}x^۲)+\frac{۱}{۲}x^۲$$

$$\Rightarrow S(x)=(-\sqrt{۲}-۱+\frac{۱}{۲})x^۲+۸\sqrt{۲}x$$

با توجه به این‌که ضریب $x^۲$ منفی است، پس $S$ دارای max است در نتیجه طول رأس را می‌یابیم:

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۸\sqrt{۲}}{-۲\sqrt{۲}-۲+۱}=\frac{۸\sqrt{۲}}{۱+۲\sqrt{۲}}$$

۵- اگر $\alpha$ و $\beta$ صفرهای سهمی $f(x)=-۲x^۲+۳x+۲$ باشند، مقدار $\frac{\alpha^۴-\beta^۲}{۲۱\alpha}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۹}{۸}$

۴) $\frac{۹}{۴}$

**پاسخ: گزینهٔ ۱** (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۳ و ۱۴ ـ ۱۱۰۱)

چون $\alpha$ و $\beta$ صفرهای سهمی $f(x)$ هستند، پس ریشه‌های $-۲x^۲+۳x+۲=۰$ هستند، یعنی:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}\\ \alpha\beta=-۱\Rightarrow\beta=\frac{-۱}{\alpha}\end{cases}$$

$$\frac{\alpha^۴-\beta^۲}{۲۱\alpha}=\frac{۱}{۲۱}(\frac{\alpha^۴-\beta^۲}{\alpha})=\frac{۱}{۲۱}(\alpha^۳-\frac{\beta^۲}{\alpha})=\frac{۱}{۲۱}(\alpha^۳+\beta^۳)$$

$$=\frac{۱}{۲۱}(S^۳-۳PS)=\frac{۱}{۲۱}(\frac{۲۷}{۸}-۳(-۱)(\frac{۳}{۲}))=\frac{۱}{۲۱}\times\frac{۲۷+۳۶}{۸}=\frac{۱}{۲۱}\times\frac{۶۳}{۸}=\frac{۳}{۸}$$

۶- هرگاه $a$ و $\alpha$ ریشه‌های $x^۲+۲x+۶m=۰$ و $b$ و $\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-x+۳m=۰$ باشند و $m\neq ۰$ باشد، مقدار $a^۲+b^۲$ چه عددی است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۲۸ ۴) ۵۲

**پاسخ: گزینهٔ ۲** (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۱۰۱)

$\alpha$ ریشهٔ مشترک دو معادله است پس در هر دو معادله صدق می‌کند:

$$\begin{cases}\alpha^۲+۲\alpha+۶m=۰\\ \alpha^۲-\alpha+۳m=۰\end{cases}\Rightarrow ۲\alpha+۶m=-\alpha+۳m\Rightarrow ۳\alpha=-۳m\Rightarrow \alpha=-m$$

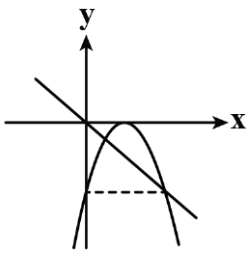
$$\Rightarrow m^۲-۲m+۶m=۰\Rightarrow m^۲+۴m=۰\Rightarrow \begin{cases}m=۰ \text{ غ‌ق‌ق}\\ m=-۴\Rightarrow \alpha=۴\end{cases}$$

ریشهٔ مشترک $\alpha=۴$ است:

$$\begin{cases}x^۲+۲x-۲۴=۰\Rightarrow (x-۴)(x+۶)=۰\Rightarrow a=-۶\\ x^۲-x-۱۲=۰\Rightarrow (x-۴)(x+۳)=۰\Rightarrow b=-۳\end{cases}$$

$$a^۲+b^۲=۳۶+۹=۴۵$$

۷- نمودار سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ و خط $y=-۶x$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\frac{b}{ac}$ چه عددی است؟




۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $\frac{۱}{۶}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

**پاسخ: گزینهٔ ۲** (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۶ و ۱۷ ـ ۱۱۰۱)

فرض کنیم $f$ در نقطه‌ای به طول $\alpha$ بر محور $x$ها مماس شده باشد، پس $f(x)=a(x-\alpha)^۲$ و $a<۰$ است.

با توجه به این‌که طول رأس سهمی، میانگین طول‌های دو نقطهٔ هم عرض روی سهمی است، پس:

$$f(۰)=f(۲\alpha)=c\Rightarrow A\begin{vmatrix}۲\alpha\\ c\end{vmatrix}\in f$$

نقطهٔ $A$ روی خط $y=-۶x$ قرار دارد، پس:

$$c=-۱۲\alpha\ ,\ f(x)=a(x^۲-۲\alpha x+\alpha^۲)=ax^۲-۲a\alpha x+a\alpha^۲\xrightarrow{x=۰} a\alpha^۲=-۱۲\alpha\Rightarrow a\alpha=-۱۲\Rightarrow a=\frac{-۱۲}{\alpha}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-۱۲}{\alpha}x^۲+۲۴x-۱۲\alpha\Rightarrow \begin{cases}ac=۱۴۴\\ b=۲۴\end{cases}$$

$$\frac{b}{ac}=\frac{۲۴}{۱۴۴}=\frac{۱}{۶}$$

۸- اگر $\alpha$ و $\beta$ جواب‌های $x^۲-۱۶x+۴=۰$ باشند، مقدار عبارت $\sqrt{\frac{\alpha^۲+۴}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta^۲+۴}{\alpha}}$ چه عددی است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

**پاسخ: گزینهٔ ۴** (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۱۰۱)

$\alpha$ و $\beta$ جواب‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند:

$$\alpha^۲-۱۶\alpha+۴=۰\Rightarrow\alpha^۲+۴=۱۶\alpha$$

$$\beta^۲-۱۶\beta+۴=۰\Rightarrow\beta^۲+۴=۱۶\beta$$

$$\alpha+\beta=۱۶$$

$$\alpha\beta=۴\Rightarrow\begin{cases}\beta=\frac{۴}{\alpha}\\ \alpha=\frac{۴}{\beta}\end{cases}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sqrt{\frac{\alpha^۲+۴}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta^۲+۴}{\alpha}}=\sqrt{\frac{۱۶\alpha}{\frac{۴}{\alpha}}}+\sqrt{\frac{۱۶\beta}{\frac{۴}{\beta}}}=\sqrt{۴\alpha^۲}+\sqrt{۴\beta^۲}$$

$$=|۲\alpha|+|۲\beta|=۲\alpha+۲\beta=۲(\alpha+\beta)=۲(۱۶)=۳۲$$

توجه کنید که چون معادله دارای ۲ جواب مثبت است، پس $\alpha,\beta>۰$ و داریم: $|۲\alpha|+|۲\beta|=۲\alpha+۲\beta$

ماز

۱- حاصل عبارت $\sqrt[12]{2}\times\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{12}}\times\sqrt[4]{6}\times\sqrt[6]{108}$ کدام است؟ $A=$

۱) $12\sqrt[3]{4}$ ۲) $12\sqrt[4]{3}$ ۳) $6\sqrt[3]{4}$ ۴) $6\sqrt[4]{3}$

**پاسخ: گزینهٔ ۴** (متوسط ـ خط به خط ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۵۵ و ۵۶ ـ ۱۰۰۳)

$$A=\sqrt[6]{108}\times\sqrt[4]{6}\times\sqrt[3]{3\sqrt{12}}\times\sqrt[12]{2}$$

$$A=\sqrt[6]{3^3\times2^2}\times\sqrt[4]{3\times2}\times\sqrt[3]{\sqrt{3^3\times2^2}}\times\sqrt[12]{2}$$

$$A=\sqrt[6]{3^3\times2^2}\times\sqrt[4]{3\times2}\times\sqrt[6]{3^3\times2^2}\times\sqrt[12]{2}$$

$$A=\sqrt[12]{3^6\times2^4}\times\sqrt[12]{3^3\times2^3}\times\sqrt[12]{3^6\times2^4}\times\sqrt[12]{2}$$

$$A=\sqrt[12]{3^{15}\times2^{12}}=6\sqrt[12]{3^3}=6\sqrt[4]{3}$$

ماز

۲- در تجزیهٔ عبارت $(2x-3)(4x^2-12x+9)-27$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $x-1$ ۲) $x-2$ ۳) $x-3$ ۴) $x-4$

**پاسخ: گزینهٔ ۳** (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۶۴ ـ ۱۰۰۳)

**روش اول**

$$(2x-3)(4x^2-12x+9)-27=(2x-3)(2x-3)^2-27$$

$$=(2x-3)^3-27=(2x-3)^3-3^3 \xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} (2x-3-3)\Big((2x-3)^2+3(2x-3)+9\Big)$$

$$=(2x-6)\Big((2x-3)^2+3(2x-3)+9\Big)=2(x-3)(4x^2+9-12x+6x-9+9)=2(x-3)(4x^2-6x+9)$$

پس در تجزیه عبارت داده شده عامل $(x-3)$ وجود دارد.

**روش دوم**

کافی است ریشه‌های عبارت‌های هر یک از گزینه‌ها را در چندجمله‌ای قرار دهیم. اگر حاصل صفر شد بخش‌پذیر است.

$$x=3\Rightarrow P=(2x-3)(4x^2-12x+9)-27=3\times9-27=0$$

**اتحاد چاق و لاغر (فیل و فنجان)**

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

۳- حاصل عبارت $A=\frac{۲۷-۲\sqrt{۲}}{۳-\sqrt{۲}}-۴\sqrt{۲}+\sqrt{۶+۴\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۳ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

**پاسخ: گزینهٔ ۲** (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۵۴ و ۵۵ و ۶۴ ـ ۱۰۰۳)

$$A=\frac{۲۷-۲\sqrt{۲}}{۳-\sqrt{۲}}-۴\sqrt{۲}+\sqrt{۶+۴\sqrt{۲}}$$

$$A=\frac{۳^۳-(\sqrt{۲})^۳}{۳-\sqrt{۲}}-۴\sqrt{۲}+\sqrt{(۲+\sqrt{۲})^۲}$$

$$A=\frac{(۳-\sqrt{۲})(۹+۲+۳\sqrt{۲})}{۳-\sqrt{۲}}-۴\sqrt{۲}+\left|۲+\sqrt{۲}\right|$$

$$A=۱۱+۳\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}+۲+\sqrt{۲}=۱۳$$

### رادیکال مرکب

در مورد رادیکال مرکب دو قانون زیر را بلد باشید:

**فرم رادیکال مرکب $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$**

برای ساده کردن عبارت‌های رادیکالی به این فرم باید عبارت زیر رادیکال را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای به صورت مربع کامل نوشته و آن را از زیر رادیکال خارج کنیم:

$$\sqrt{A\pm۲\sqrt{B}}=\left|\sqrt{X}\pm\sqrt{Y}\right| \quad (X+Y=A\ ,XY=B)$$

**قانون رادیکال مرکب**

در عبارت $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ داریم:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{۲}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{۲}}\ ,\ c=\sqrt{a^۲-b}$$

۴- اگر $x^۲-۹x+۱=۰$ باشد، حاصل $x^۳+\frac{۱}{x^۳}$ کدام است؟

۱) ۶۸۲ ۲) ۷۱۲ ۳) ۶۹۲ ۴) ۷۰۲

**پاسخ: گزینهٔ ۴** (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۶۴ ـ ۱۰۰۳)

$$x^۲-۹x+۱=۰\Rightarrow x^۲+۱=۹x\xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر } x}\frac{x^۲+۱}{x}=۹\Rightarrow x+\frac{۱}{x}=۹$$

حال داریم:

$$x^۳+\frac{۱}{x^۳}=(x+\frac{۱}{x})^۳-۳x\times\frac{۱}{x}(x+\frac{۱}{x})$$

$$x^۳+\frac{۱}{x^۳}=۹^۳-۳(۱)(۹)=۷۲۹-۲۷=۷۰۲$$

**اینجوری هم بلد باش...**

$$a^۳-b^۳=(a-b)^۳+۳ab(a-b)$$

$$a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$$

۵- حاصل عبارت $A=(\sqrt{5+\sqrt{11}}+\sqrt{5-\sqrt{11}})(\sqrt{10-2\sqrt{14}})$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{14}$ ۲) $2\sqrt{11}$ ۳) $4\sqrt{14}$ ۴) $4\sqrt{11}$

**پاسخ: گزینهٔ ۲** (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۵۵ و ۵۶ ـ ۱۰۰۳)

فرض کنیم: $\sqrt{5+\sqrt{11}}+\sqrt{5-\sqrt{11}}=t$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 5+\sqrt{11}+5-\sqrt{11}+2\sqrt{(5+\sqrt{11})(5-\sqrt{11})}=t^2$

$\Rightarrow t^2=10+2\sqrt{5^2-(\sqrt{11})^2}=10+2\sqrt{14} \xrightarrow{t>0} t=\sqrt{10+2\sqrt{14}}$

$\Rightarrow A=(\sqrt{10+2\sqrt{14}})(\sqrt{10-2\sqrt{14}})=\sqrt{10^2-(2\sqrt{14})^2}=\sqrt{100-4\times14}=\sqrt{100-56}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

۱- با فرض $\log_5^3 \simeq ۰/۶۸$ و $\log_2^5 \simeq ۲/۴$، مقدار تقریبی $\log ۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۷}{۱۰۰}$ ۲) $\frac{۴۷}{۱۰۰}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۲۵}$

**پاسخ: گزینهٔ ۴** (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۱۲ ـ ۱۱۰۵)

با توجه به این‌که $\log^{۱۰} = ۱$ می‌باشد، داریم:

$$\log^{۱۰} = \log^{۲\times ۵} = \log^۲ + \log^۵ = ۱$$

از طرفی با توجه به فرمول تغییر مبنا یعنی $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}\ (a,b,c>۰, b\neq ۱, c\neq ۱)$ داریم:

$$\log_2^5 = \frac{\log^5}{\log^2} \simeq ۲/۴ \xrightarrow{\log^۲ = ۱ - \log^۵} \frac{\log^5}{۱-\log^5} \simeq ۲/۴ \Rightarrow \log^5 \simeq ۲/۴ - ۲/۴\log^5 \Rightarrow ۳/۴\log^5 \simeq ۲/۴$$

$$\Rightarrow \log^5 \simeq \frac{۲/۴}{۳/۴} = \frac{۲۴}{۳۴} \Rightarrow \log^5 \simeq \frac{۱۲}{۱۷}$$

بنابراین:

$$\log_5^3 = \frac{\log^3}{\log^5} \simeq ۰/۶۸ \Rightarrow \log^3 \simeq ۰/۶۸ \times \log^5 \Rightarrow \log^3 \simeq \frac{۶۸}{۱۰۰} \times \frac{۱۲}{۱۷} \Rightarrow \log^3 \simeq \frac{۱۲}{۲۵}$$

**تذکر**

توجه کنید که در صورت سؤال $\log_2^5 \simeq ۲/۳۲$ می‌باشد اما جهت سهولت محاسبات در طراحی تست آن را $۲/۴$ فرض کرده‌ایم.

**ویژگی‌های لگاریتم**

| مثال | ویژگی |
|---|---|
| $\log_۳^۱ = ۰$ | $\log_a^۱ = ۰$ |
| $\log_۲^۲ = ۱$ | $\log_a^a = ۱$ |
| $\log_۵^{۱۲۵} = \log_۵^{۵^۳} = ۳\log_۵^۵ = ۳$ | $\log_a^{b^n} = n\log_a^b$ |
| $\log^{(۰/۰۱)}_{\sqrt{۱۰}} = \log^{۱۰^{-۲}}_{۱۰^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{-۲}{\frac{۱}{۲}}\log_{۱۰}^{۱۰} = -۴$ | $\log_{a^n}^{b^m} = \frac{m}{n}\log_a^b$ |
| $\log^۴_{\sqrt{۲}} + \log^{۱۶}_{\sqrt{۲}} = \log^{۶۴}_{\sqrt{۲}} = \log^{۲^۶}_{۲^{\frac{۱}{۲}}} = ۱۲$ | $\log_a^{bc} = \log_a^b + \log_a^c$ |
| $\log_۲^{۵۲} - \log_۲^{۱۳} = \log_۲^{\frac{۵۲}{۱۳}} = \log_۲^۴ = ۲$ | $\log_a^{(\frac{b}{c})} = \log_a^b - \log_a^c$ |
| $\log_۴^۳ = \frac{\log_{۱۰}^۳}{\log_{۱۰}^۴}$ (تغییر مبنا به ۱۰) | $\log_a^b = \frac{\log_c^b}{\log_c^a}$ (تغییر مبنا) |
| $(۸۱)^{\log_۳^{\sqrt{۲}}} = (\sqrt{۲})^{\log_۳^{۸۱}} = (\sqrt{۲})^۴ = ۴$ | $c^{\log_a^b} = b^{\log_a^c}$ |

| | |
|---|---|
| $\log_a^b \times \log_b^c \times \ldots \times \log_n^m = \log_a^m$ | $\log_2^3 \times \log_{\sqrt{3}}^7 \times \log_{49}^{\frac{1}{4}}$<br>$= \log_2^3 \times 2\log_3^7 \times (-\log_7^2) = -2$ |
| $\log_a^b = \frac{1}{\log_b^a} \quad a,b \neq 1$ | $\log_3^2 = \frac{1}{\log_2^3}$ |

**۲- اگر $(\log_2^{4x})\times(\log_4^{\frac{x}{4}}) = 5$ باشد، مقدار $\log_2^{4x}$ کدام می‌تواند باشد؟**

۱) $-1$ ۲) $-2$ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینهٔ ۱** (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۱۲ و ۱۱۳ ـ ۱۱۰۵)

**بررسی سریع:**

$$\log_2^{\frac{x}{4}} \times \log_2^{4x} = 5 \Rightarrow (\log_2^x - \cancel{\log_2^4}^{2}) \times (\log_2^x + \cancel{\log_2^4}^{2}) = 5 \Rightarrow (\log_2^x)^2 - 4 = 5 \Rightarrow (\log_2^x)^2 = 9 \Rightarrow \log_2^x = \pm 3$$

$$\log_2^{4x} = \log_2^x + \log_2^4 = \pm 3 + 2 = -1 \text{ یا } 5$$

طبق نکتهٔ گفته‌شده در انتهای سؤال داریم:

$$(\log_2^{\frac{x}{4}}) \times (\log_2^{4x}) = 5 \Rightarrow (\log_2^x - \log_2^4)(\log_2^x + \log_2^4) = 5 \xrightarrow{\log_2^4 = 2} (\log_2^x)^2 - 2^2 = 5$$

$$\Rightarrow (\log_2^x)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} \log_2^x = 3 \\ \log_2^x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2^3 = 8 \\ x = 2^{-3} = \frac{1}{8} \end{matrix}$$

حال به محاسبهٔ $\log_2^{4x}$ می‌پردازیم:

$$x = 8 \Rightarrow \log_2^{4x} = \log_2^{32} = \log_2^{2^5} = 5$$

$$x = \frac{1}{8} \Rightarrow \log_2^{4x} = \log_2^{\frac{1}{2}} = \log_2^{2^{-1}} = -1$$

که فقط $-1$ در گزینه‌ها موجود است.

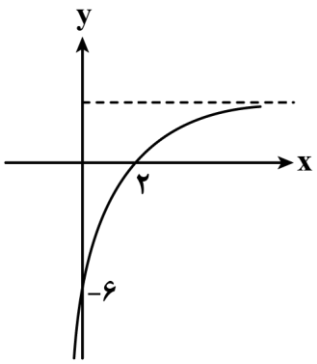
**یه نکتهٔ طلایی**

اگر a، b و c سه عدد مثبت و $c \neq 1$ باشد، آن‌گاه:

$$\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$$

$$\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$$

**۳- نمودار تابع $f(x) = 2 - 2^{bx+c}$ به صورت مقابل است. مقدار $f^{-1}(-22)$ کدام است؟**




۱) $-\log_3^2$

۲) $-\log_2^3$

۳) $-2\log_2^3$

۴) $-2\log_3^2$

**پاسخ: گزینهٔ ۲** (متوسط ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۱۸ ـ ۱۱۰۵)

با توجه به نمودار تابع، مختصات نقاط $A(۰,-۶)$ و $B(۲,۰)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کنند، بنابراین:

$$f(۲)=۰\Rightarrow ۲-۲^{۲b+c}=۰\Rightarrow ۲^{۲b+c}=۲\Rightarrow ۲b+c=۱$$

$$f(۰)=-۶\Rightarrow ۲-۲^{c}=-۶\Rightarrow ۲^{c}=۸\Rightarrow c=۳\xrightarrow{۲b+c=۱} ۲b+۳=۱\Rightarrow ۲b=-۲\Rightarrow b=-۱$$

بنابراین ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=۲-۲^{-x+۳}$ می‌باشد. برای محاسبهٔ $f^{-۱}(-۲۲)$ داریم:

$$f^{-۱}(-۲۲)=\alpha\Rightarrow f(\alpha)=-۲۲\Rightarrow ۲-۲^{-\alpha+۳}=-۲۲\Rightarrow ۲^{-\alpha+۳}=۲۴\Rightarrow ۲^{-\alpha}\times ۲^{۳}=۲۴\Rightarrow ۲^{-\alpha}=۳$$

از دو طرف رابطهٔ $۲^{-\alpha}=۳$ لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم:

$$۲^{-\alpha}=۳\Rightarrow \log_{۲}^{۲^{-\alpha}}=\log_{۲}^{۳}\Rightarrow -\alpha=\log_{۲}^{۳}\Rightarrow \alpha=-\log_{۲}^{۳}$$

### تابع نمایی

هر تابع به فرم $f(x)=a^{x}$ $(a>۰,a\neq ۱)$ را **تابع نمایی** می‌گوییم ⇐ x در توان و پایه **عددی مثبت** و **مخالف یک** می‌باشد.

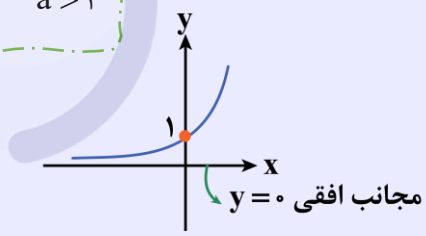
### یه نمونهٔ باحال ببین

حدود m را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=(۲m-۱)^{x}$ نمایی باشد:

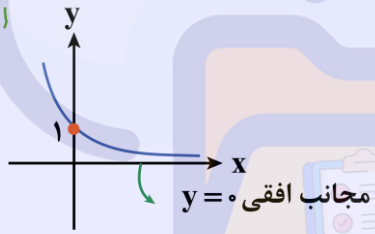
$$\begin{matrix}۲m-۱>۰\\ ۲m-۱\neq ۱\end{matrix}\Rightarrow m>\frac{۱}{۲},m\neq ۱$$

نمودار تابع نمایی $y=a^{x}$ $(a>۰,a\neq ۱)$ در حالت کلی به صورت زیر می‌باشد:

$y=a^{x}$ $a>۱$ صعودی




$y=a^{x}$ $۰<a<۱$ نزولی




دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $(۰,+\infty)$ می‌باشد.

هر خط که به موازات محور x ها رسم شود نمودار را در **حداکثر یک نقطه** قطع می‌کند، بنابراین تابع **یک‌به‌یک** و **معکوس‌پذیر** است.

### نکته

اگر $A'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ نقطه‌ای روی تابع $y=f^{-۱}(x)$ باشد، داریم:

$$A'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}\in f^{-۱}\Leftrightarrow A\begin{vmatrix}\beta\\ \alpha\end{vmatrix}\in f$$

### یه نمونهٔ باحال ببین

اگر $f(x)=x^{۳}+x$ باشد، در این صورت $f(۲)=۱۰$ و $f^{-۱}(۱۰)=۲$ است یعنی نقطهٔ $(۲,۱۰)$ روی تابع f و نقطهٔ $(۱۰,۲)$ روی تابع $f^{-۱}$ قرار دارد.

برای حل معادلاتی به فرم $a^{x}=b$ $(a>۰,a\neq ۱)$ که a و b را نمی‌توان برحسب پایه‌های یکسان نوشت، کافی است از دو طرف لگاریتم در مبنای a بگیریم.

$$a^{x}=b\Rightarrow \log_{a}^{a^{x}}=\log_{a}^{b}\Rightarrow x=\log_{a}^{b}$$

**یه نمونهٔ باحال ببین**

معادلهٔ $۲^{x+۱}=۷$ را حل کنید.

$$۲^{x+۱}=۷ \xrightarrow{\text{از ۲ طرف لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم}} \log_۲^{۲^{x+۱}}=\log_۲^۷ \Rightarrow x+۱=\log_۲^۷ \Rightarrow x=\log_۲^۷-۱$$

**۴- معادلهٔ $\log_۲^{|x+۲|}+\log_۲^{(x^۲-۲x+۴)}=۳$ چند جواب دارد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ: گزینهٔ ۳** (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۱۲ و ۱۱۳ ـ ۱۱۰۵)

توجه کنید عبارت $x^۲-۲x+۴$ همواره مثبت است. (چرا؟) پس می‌توان برای آن قدرمطلق قرار داد!

$$\log_۲^{|x+۲|}+\log_۲^{|x^۲-۲x+۴|}=۳ \Rightarrow \log_۲^{|x+۲||x^۲-۲x+۴|}=۳ \Rightarrow \log_۲^{|x^۳+۸|}=۳ \Rightarrow |x^۳+۸|=۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۳+۸=۸ \Rightarrow x^۳=۰ \Rightarrow x=۰ \\ x^۳+۸=-۸ \Rightarrow x^۳=-۱۶ \Rightarrow x=\sqrt[۳]{-۱۶}=-۲\sqrt[۳]{۲} \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ موردنظر ۲ جواب دارد.

**معادلات لگاریتمی**

به معادله‌ای که در آن x جلوی لگاریتم قرار بگیرد، معادلهٔ لگاریتمی می‌گوییم. معادلات لگاریتمی را به ۲ نوع تقسیم می‌کنیم:

۱) در معادلهٔ نوع اول، لگاریتم با **یک عدد** مساوی می‌شود. $\log_b^a=c \Rightarrow a=b^c$

۲) در معادلهٔ نوع دوم، دو عبارت لگاریتمی با مبنای یکسان، **مساوی** می‌شوند. $\log_b^a=\log_b^c \Rightarrow a=c$

پس از حل معادلهٔ لگاریتمی باید درستی جواب‌ها را چک کنیم تا در دامنهٔ تعریف لگاریتم قرار داشته باشند.

**یه نمونهٔ باحال ببین**

معادلات زیر را حل کنید:

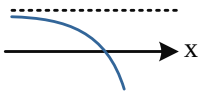
$$\log_۳^{x+۱}-۲=۰$$

$$\log_۳^{x+۱}=۲ \Rightarrow x+۱=۳^۲ \Rightarrow x=۸ \quad \text{قابل قبول}$$

$$\log_۵^{۲x+۱}-\log_۵^{x-۲}=۰$$

$$\log_۵^{۲x+۱}=\log_۵^{x-۲} \Rightarrow ۲x+۱=x-۲ \Rightarrow x=-۳$$ غیرقابل قبول، زیرا جلوی لگاریتم‌ها را منفی می‌کند.

۵- نمودار تابع $f(x)=۲^{x+k}-۲^{x+۲}+۲^{k}$ در شکل مقابل رسم شده است. حدود $k$ کدام است؟




۱) $k<۲$

۲) $k>۲$

۳) $۱<k<۲$

۴) $۰<k<۲$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

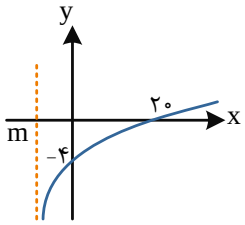
توجه کنید که:

$$f(x)=۲^{x}(۲^{k}-۲^{۲})+۲^{k}=(۲^{k}-۴)۲^{x}+۲^{k}$$

چون تابع $y=۲^{x}$ اکیداً صعودی است، ولی تابع $f$ اکیداً نزولی است، پس $۲^{k}-۴$ باید عددی منفی باشد، بنابراین:

$$۲^{k}-۴<۰\Rightarrow ۲^{k}<۴\Rightarrow k<۲$$

۶- نمودار تابع $f(x)=\log_a^{(۳x+b)}-c$ در شکل مقابل، رسم شده است. مقدار $m$ کدام است؟




۱) $\frac{۲۰}{۱-a^{۴}}$

۲) $\frac{۳۰}{۱-a}$

۳) $\frac{۶۰}{۱-a^{۴}}$

۴) $\frac{۲۰}{۱-a}$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

نمودار تابع $f$ از نقاط $(۰,-۴)$ و $(۲۰,۰)$ عبور کرده است، بنابراین:

$$\begin{cases} f(۰)=-۴\Rightarrow \log_a^{b}-c=-۴\Rightarrow \log_a^{b}=c-۴\Rightarrow b=a^{c-۴} \\ f(۲۰)=۰\Rightarrow \log_a^{(۶۰+b)}-c=۰\Rightarrow \log_a^{(b+۶۰)}=c\Rightarrow b+۶۰=a^{c} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\frac{b+۶۰}{b}=\frac{a^{c}}{a^{c-۴}}\Rightarrow \frac{b+۶۰}{b}=a^{۴}\Rightarrow ۱+\frac{۶۰}{b}=a^{۴}\Rightarrow \frac{۶۰}{b}=a^{۴}-۱\Rightarrow b=\frac{۶۰}{a^{۴}-۱}$$

از طرف دیگر، دامنهٔ تابع $f$ بازهٔ $(m,+\infty)$ است که به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$۳x+b>۰\Rightarrow x>-\frac{b}{۳}\Rightarrow D_f=(-\frac{b}{۳},+\infty)$$

در نتیجه:

$$m=-\frac{b}{۳}=-\frac{۶۰}{۳(a^{۴}-۱)}\Rightarrow m=\frac{۲۰}{۱-a^{۴}}$$

### دامنه لگاریتم چطوری به دست می‌آید؟

برای به‌دست آوردن دامنه تابع $y=\log_{g(x)}^{f(x)}$، باید شروط زیر را بررسی کنیم:

۱) $f(x)>۰$ (عبارت جلوی لگاریتم مثبت باشه) ۲) $g(x)>۰$ (مبنای لگاریتم مثبت باشه) ۳) $g(x)\neq ۱$ (مبنای لگاریتم یک نباشه)

پس از حل نامساوی‌های بالا، برای به دست آوردن دامنه، بین جواب‌های به‌دست آمده **اشتراک** می‌گیریم، به عبارتی دیگر:

$$y=\log_{g(x)}^{f(x)}\quad D_y:\{x|f(x)>۰\ ,\ g(x)>۰\ ,\ g(x)\neq ۱\}$$

### تکنیک تستی

هرگاه دامنه تابع $\log_c^{(ax+b)}$ به صورت $(-\infty,k)$ یا به صورت $(k,+\infty)$ باشد، $x=k$ ریشه عبارت $(ax+b)$ است.

۷- جرم نوعی مادهٔ رادیواکتیو هر ۲۰ سال دو سوم برابر می‌شود. اگر ۳۰۰ گرم از این ماده موجود باشد، پس از حداقل چند سال جرم آن کمتر از ۱۰ گرم می‌شود؟ $(\log ۳ \simeq ۰/۵ \ , \ \log ۲ \simeq ۰/۳)$

۱) ۱۵۱ ۲) ۷۶ ۳) ۳۰۱ ۴) ۱۷۶

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

فرض کنید در یک دورهٔ زمانی جرم ماده $\frac{۲}{۳}$ برابر می‌شود. اگر m گرم از این ماده موجود باشد، آن‌گاه جرم این ماده در دوره‌های زمانی مختلف مطابق جدول زیر خواهد بود:

| دورهٔ زمانی | ۱ | ۲ | ۳ | n |
|---|---|---|---|---|
| جرم پس از دوره | $\frac{۲}{۳}m$ | $(\frac{۲}{۳})^۲m$ | $(\frac{۲}{۳})^۳m$ | $(\frac{۲}{۳})^n m$ |

بنابراین پس از n سال جرم باقی‌مانده برابر $۳۰۰\times(\frac{۲}{۳})^n$ خواهد بود، در نتیجه:

$$(\frac{۲}{۳})^n \times ۳۰۰ < ۱۰ \Rightarrow (\frac{۲}{۳})^n < \frac{۱}{۳۰} \Rightarrow \log(\frac{۲}{۳})^n < \log(\frac{۱}{۳۰})$$

$$\Rightarrow n\log\frac{۲}{۳} < -\log ۳۰ \Rightarrow n(\log ۲ - \log ۳) < -\log ۳ - ۱$$

$$\Rightarrow n > \frac{۱+\log ۳}{\log ۳ - \log ۲} \Rightarrow\Rightarrow n > \frac{۱+۰/۵}{۰/۵-۰/۳} = ۷/۵$$

بنابراین باید بیش از $۷/۵\times ۲۰ = ۱۵۰$ سال طی شود تا جرم ماده کمتر از ۱۰ گرم شود، یعنی حداقل باید ۱۵۱ سال طی شود.

**مقدار یک ماده با گذشت زمان چجوری کم می‌شه؟! باید رادیواکتیو باشه!**

اگر مقدار اولیه $A_۰$ بعد از گذشت m واحد زمانی k برابر شود، مقدار آن بعد از t واحد زمانی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$A_۰$ = مقدار در لحظه شروع

$f(t)$ = مقدار پس از گذشته t واحد زمانی

$$f(t) = A_۰ k^{\frac{t}{m}}$$

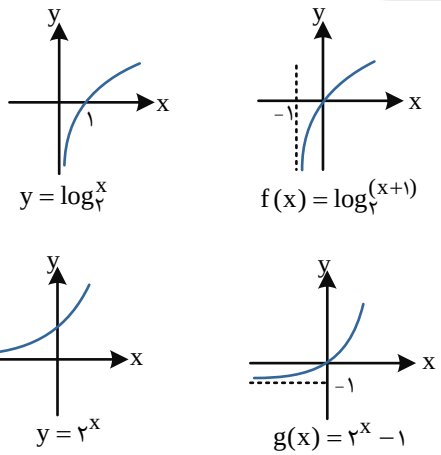
گروه آموزشی ماز

۸- نمودار تابع $f(x) = \log_۲^{(x+۱)}$ در دو نقطه نمودار تابع $g(x) = ۲^x - ۱$ را قطع می‌کند. فاصلهٔ این دو نقطه از یکدیگر چقدر است؟

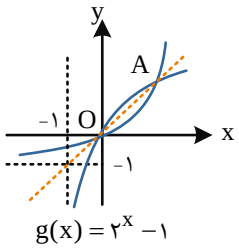
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

به نمودار این توابع توجه کنید:



بنابراین نمودار توابع f و g مطابق شکل زیر یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند که یکی مبدأ مختصات و دیگری نقطهٔ A است.




توجه کنید که این دو تابع وارون یکدیگرند و نقاط تقاطع نمودارهای آن‌ها روی خط $y=x$ قرار دارد. می‌توان حدس زد که نقطهٔ A نقطهٔ $(۱,۱)$ است:

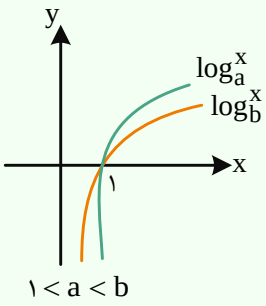
$$f(۱)=\log_۲^{(۱+۱)}=۱ \quad , \quad g(۱)=۲^۱-۱=۱$$

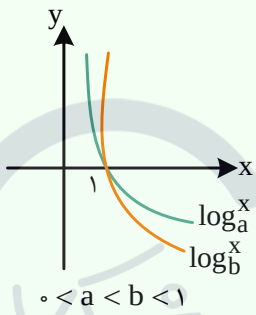
بنابراین:

$$OA=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۲}$$

### تغییر مبنا چطوری نمودار log رو عوض می‌کنه؟

مقایسه نمودارهای توابع $f(x)=\log_a^x$ و $g(x)=\log_b^x$:




۱) $x>۱ \rightarrow f(x)>g(x)$

۲) $x=۱ \rightarrow f(x)=g(x)$

۳) $۰<x<۱ \rightarrow f(x)<g(x)$

به عبارت دیگر در $x>۱$ هر چه مبنا **بزرگ‌تر** باشه، نمودار اون **پایین‌تر** قرار می‌گیره و در $۰<x<۱$، هر چه مبنا **بزرگ‌تر** باشه، نمودار اون بالاتر قرار می‌گیره.

گروه آموزشی ماز

**۹- کدام عدد بزرگ‌تر است؟**

۱) $\log_۲^۵$ ۲) $\log_۴^{۲۴}$ ۳) $\log_۸^{۶۳}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

توجه کنید که:

$$\log_۴^{۲۴}=\frac{۱}{۲}\log_۲^{۲۴}=\log_۲^{\sqrt{۲۴}}<\log_۲^{\sqrt{۲۵}} \Rightarrow \log_۴^{۲۴}<\log_۲^۵$$

$$\log_۸^{۶۳}=\frac{۱}{۳}\log_۲^{۶۳}=\log_۲^{\sqrt[۳]{۶۳}}<\log_۲^{\sqrt[۳]{۱۲۵}} \Rightarrow \log_۸^{۶۳}<\log_۲^۵$$

$$\log_۲^۴<\log_۲^۵ \Rightarrow ۲<\log_۲^۵$$

بنابراین $\log_۲^۵$ از بقیه اعداد داده شده بزرگ‌تر است.

گروه آموزشی ماز

**۱۰- اگر α جواب غیرصفر معادلهٔ $۲^{x^۳}=۳^{x^۲}$ باشد، مقدار $۳^{۲\alpha}$ کدام است؟**

۱) ۹ ۲) ۲۷ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt[۳]{۳}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

از طرفین معادلهٔ داده شده در مبنای ۲ لگاریتم می‌گیریم.

$$۲^{x^۳}=۳^{x^۲} \Rightarrow \log_۲^{۲^{x^۳}}=\log_۲^{۳^{x^۲}} \Rightarrow x^۳\log_۲^۲=x^۲\log_۲^۳ \Rightarrow x^۳=x^۲\log_۲^۳ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=\log_۲^۳ \end{cases}$$

بنابراین:

$$\alpha=\log_۲^۳ \Rightarrow ۳^{۲\alpha}=۳^{۲\log_۲^۳}=۳^۳=۲۷$$

**لگاریتم گرفتن هم خوب به کار میاد!**

در حل برخی از معادلات، باید از دو طرف معادله در یک مبنای مشخص **لگاریتم بگیریم**، به عبارتی:

$$a^{f(x)}=b \xrightarrow[\text{مبنای a لگاریتم می‌گیریم}]{\text{از دو طرف تساوی در}} \log_a^{a^{f(x)}}=\log_a^b \Rightarrow f(x)=\log_a^b$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- معادلهٔ $\log_{۴}^{x}+m\log_{x}^{۸}=۲$ جواب ندارد. مجموعهٔ مقادیر ممکن $m$ کدام است؟

۱) $(\frac{۳}{۲},+\infty)$ ۲) $(\frac{۳}{۴},+\infty)$ ۳) $(\frac{۴}{۳},+\infty)$ ۴) $(\frac{۲}{۳},+\infty)$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\log_{۴}^{x}+m\log_{x}^{۸}=۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_{۲}^{x}+۳m\log_{x}^{۲}=۲ \Rightarrow \log_{۲}^{x}+\frac{۶m}{\log_{۲}^{x}}=۴$$

اگر فرض کنیم $t=\log_{۲}^{x}$ معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$t+\frac{۶m}{t}=۴ \Rightarrow t^{۲}-۴t+۶m=۰$$

برای این‌که معادلهٔ بالا جواب نداشته باشد، باید:

$$\Delta<۰ \Rightarrow ۱۶-۲۴m<۰ \Rightarrow m>\frac{۲}{۳} \Rightarrow m\in(\frac{۲}{۳},+\infty)$$

**تغییر متغیر همه جا جوابه!**

معادلاتی که با تغییر متغیر $\log_a^{f(x)}=t$، به یک معادله جبری (معمولاً درجه ۲) تبدیل می‌شوند.

برای حل این نوع از معادله‌ها، اول با استفاده از **تغییر متغیر** مناسب، معادله را به یک معادله جبری تبدیل می‌کنیم و بعدش با حل معادله جبری، مقدار $t$ رو به‌دست میاریم که با مشخص شدن $t$، مقدار $x$ هم به‌دست میاد.

گروه آموزشی ماز

۱۲- اگر $\log_{۶}^{۴}=a$، مقدار $\log_{۸}^{۱۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{a+۲}{۳a}$ ۲) $\frac{a+۱}{۲a}$ ۳) $\frac{a+۳}{۳a}$ ۴) $\frac{a+۲}{۲a}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

توجه کنید که:

$$\log_{۶}^{۴}=a \Rightarrow \log_{۴}^{۶}=\frac{۱}{a} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۶}=\frac{۱}{a}$$

$$\log_{۲}^{۳}+\log_{۲}^{۲}=\frac{۲}{a} \Rightarrow \log_{۲}^{۳}+۱=\frac{۲}{a} \Rightarrow \log_{۲}^{۳}=\frac{۲}{a}-۱$$

بنابراین:

$$\log_{۸}^{۱۲}=\frac{۱}{۳}\log_{۲}^{۱۲}=\frac{۱}{۳}(\log_{۲}^{۴}+\log_{۲}^{۳})=\frac{۱}{۳}(۲+\frac{۲}{a}-۱)=\frac{۱}{۳}(۱+\frac{۲}{a})=\frac{a+۲}{۳a}$$

**کنکور سراسری ریاضی ۱۴۰۱**

اگر $\log_{۸}^{۱۸}=m$ باشد، حاصل $\log_{۴}^{۱۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}(m+۱)$ ۲) $\frac{۳m+۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}(m-۱)$ ۴) $\frac{۳m-۱}{۴}$

گروه آموزشی ماز

۱۳- حاصل عبارت $A=\frac{\log_{۲}^{۳}+۱}{\log_{۳}^{۵}\log_{۲}^{۶}}$ کدام است؟

۱) $\log_{۶}^{۱۵}$ ۲) $\log_{۲}^{۱۵}$ ۳) $\log_{۳}^{۵}$ ۴) $\log_{۵}^{۳}$

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

توجه کنید که:

$$A=\frac{\log_{۲}^{۳}+۱}{\log_{۳}^{۵}(\log_{۲}^{۳}+\log_{۲}^{۲})}=\frac{\log_{۲}^{۳}+۱}{\log_{۳}^{۵}(\log_{۲}^{۳}+۱)}=\frac{۱}{\log_{۳}^{۵}}=\log_{۵}^{۳}$$

سنجش کلاد

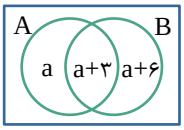
گروه آموزشی ماز

۱- اگر $n(A\cup B)=۳۳$ باشد و $n(A-B)$ و $n(A\cap B)$ و $n(B-A)$ به ترتیب جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۳ باشند، مجموعهٔ $A$ چند عضو دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۱ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

اگر تعداد اعضای $A-B$ را $a$ بنامیم، خواهیم داشت:




$$۳a+۹=۳۳\Rightarrow ۳a=۲۴\Rightarrow a=۸$$

بنابراین:

$$n(A)=۲a+۳=۱۹$$

**اجتماع و اشتراک چه ربطی به هم دارن؟!**

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

**دنباله‌ای که $d$ تا $d$ تا زیاد میشه...**

**دنبالهٔ حسابی:** دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جملهٔ اول) با **اضافه شدن عددی ثابت** به جملهٔ قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنبالهٔ حسابی نامیده می‌شود و به آن **عدد ثابت**، **قدرنسبت دنباله** می‌گویند.

دنبالهٔ حسابی همان **الگوی خطی** است.

$$t_۱=a$$
$$t_۲=t_۱+d=a+d$$
$$t_۳=t_۲+d=a+۲d$$
$$\vdots$$
$$t_n=t_{n-۱}+d=a+(n-۱)d$$

گروه آموزشی ماز

۲- ۴۰ نفر وارد یک باشگاه ورزشی شده‌اند که دارای ۲ دستگاه $A$ و $B$ است. اگر تعداد افرادی که از هیچ دستگاهی استفاده نکرده‌اند، ۱۰ واحد کمتر از کسانی که از دستگاه $A$ استفاده نکرده‌اند و ۱۸ واحد کمتر از کسانی که از دستگاه $B$ استفاده نکرده‌اند، باشد، حداکثر چند نفر از هر دو دستگاه استفاده کرده‌اند؟

مشابه تمرین کتاب درسی

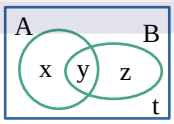
۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۰۰۱)

تعداد افرادی که از دستگاه $A$ استفاده نکرده‌اند $=z+t$

تعداد افرادی که از دستگاه $B$ استفاده نکرده‌اند $=x+t$

تعداد افرادی که از دو دستگاه استفاده نکرده‌اند $=t$




خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}(z+t)-t=۱۰\Rightarrow z=۱۰\\(x+t)-t=۱۸\Rightarrow x=۱۸\end{array}\right\}\Rightarrow x+z=۲۸$$

می‌دانیم $x+y+z+t=۴۰$ است.

بنابراین:

$$y+t=۱۲\Rightarrow t=۱۲-y$$

چون $t\geq ۰$ است، خواهیم داشت:

$$۱۲-y\geq ۰\Rightarrow y\leq ۱۲$$

حداکثر تعداد افرادی که از دو دستگاه استفاده کرده‌اند ۱۲ نفر است.

۳- ۵۳۱ سکه را بین ۹ نفر طوری تقسیم کرده‌ایم که تعداد سهم‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند. اگر افراد به ترتیب تعداد سهم در یک صف قرار گیرند، نفر نهم ۱۱۱ سکه دارد. نفر هفتم چند سکه دارد؟

۱) ۸۵ ۲) ۸۶ ۳) ۸۷ ۴) ۸۸

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$

می‌دانیم: $a_1 + a_9 = a_2 + a_8 = a_3 + a_7 = a_4 + a_6 = 2a_5$

$\Rightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = 9a_5 = 531 \Rightarrow a_5 = 59$

از طرفی: $a_7 = \frac{a_5 + a_9}{2} = \frac{59 + 111}{2} = \frac{170}{2} = 85$

گروه آموزشی ماز

۴- $a_n$ یک الگوی خطی و $b_n$ یک دنبالهٔ حسابی است. اگر $b_1$ یک واحد بیشتر از $a_1$ و $b_4$ دو واحد کمتر از $a_4$ باشد، $b_2 - a_2$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

الگوی خطی همان دنبالهٔ حسابی است.

$$\left.\begin{matrix} a_4 = a_1 + 3d \\ b_4 = b_1 + 3d' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underbrace{a_4 - b_4}_{2} = \underbrace{a_1 - b_1}_{-1} + 3(d - d') \Rightarrow d - d' = 1$$

خواهیم داشت: $b_2 - a_2 = b_1 + d' - (a_1 + d) = (b_1 - a_1) + (d' - d) = 1 + (-1) = 0$

گروه آموزشی ماز

۵- دنبالهٔ $a_n : a, b, c$ یک دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ $b_n : b-a, b, a+b$ یک دنبالهٔ هندسی است. مجموع جملات دنبالهٔ حسابی برابر ۶ است. حاصل‌ضرب جملات دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

جملات دنبالهٔ حسابی: $a_n : a, a+d, a+2d$

جملات دنبالهٔ هندسی: $b_n : d, d+a, d+2a$

دنبالهٔ $b_n$ نیز یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت a است و چون یک دنبالهٔ هندسی نیز می‌باشد، پس دنبالهٔ ثابت است. در نتیجه: $a = 0$

خواهیم داشت: $a_n : 0, d, 2d$ مجموع جملات $= 0 + d + 2d = 6 \Rightarrow d = 2$

$b_n : d, d, d \Rightarrow b_n : 2, 2, 2 \Rightarrow$ حاصل‌ضرب جملات $= 2 \times 2 \times 2 = 8$

**دنباله هندسی و حسابی یکی شدن!**

دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، یک دنبالهٔ **ثابت** است.

گروه آموزشی ماز

۶- در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ پنجم مربع جملهٔ دوم بوده و جملهٔ هفتم ۶ واحد بیشتر از جملهٔ سوم است. جملهٔ نهم چند واحد بیشتر از جملهٔ پنجم است؟

۱) ۶ ۲) $6\sqrt{3}$ ۳) $6\sqrt[4]{3}$ ۴) $6\sqrt[4]{27}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

$a_n$ دنبالهٔ موردنظر است. می‌دانیم:

$a_5 = a_2^2 \Rightarrow aq^4 = (aq)^2 \Rightarrow aq^4 = a^2q^2 \Rightarrow a = q^2$

همچنین: $a_7 - a_3 = 6 \Rightarrow aq^6 - aq^2 = 6 \Rightarrow a(a^3) - a(a) = 6 \Rightarrow a^4 - a^2 - 6 = 0$

$\Rightarrow (a^2 + 2)(a^2 - 3) = 0 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$

چون $a = q^۲$ می‌باشد. بنابراین $a = \sqrt{۳}$ قابل قبول است.

خواهیم داشت: $a_۹ - a_۵ = aq^۸ - aq^۴ = a^۵ - a^۳ = ۹\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۳} = ۶\sqrt{۳}$

**حالا دنبالهٔ هندسی چی بود؟**

دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جملهٔ اول) از **ضرب جملهٔ قبل از خودش در عددی ثابت و ناصفر** به دست می‌آید. این عدد را **قدرنسبت** می‌نامیم. جملهٔ اول هم باید ناصفر باشد.

$t_۱ = a$

$t_۲ = t_۱.r = ar$

$t_۳ = t_۲.r = ar^۲$

$\vdots$

$t_n = t_{n-۱}.r = ar^{n-۱}$

**گروه آموزشی ماز**

**۷- جملات اول، ششم و چهار برابر جملهٔ نهم در یک دنبالهٔ حسابی با جملات مثبت به ترتیب جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی هستند. جملهٔ دوم دنبالهٔ حسابی چند برابر جملهٔ اول است؟**

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

اگر $a_n$ دنبالهٔ حسابی باشد $a_۱$ و $a_۶$ و $۴a_۹$ تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند. بنابراین:

$$a_۶^۲ = ۴a_۱a_۹ \Rightarrow (a+۵d)^۲ = ۴a(a+۸d) \Rightarrow ۳a^۲ + ۲۲ad - ۲۵d^۲ = ۰$$

دو طرف معادله را بر $d^۲$ تقسیم می‌کنیم. اگر $\frac{a}{d} = k$ باشد، خواهیم داشت:

$$۳(\frac{a}{d})^۲ + ۲۲\frac{a}{d} - ۲۵ = ۰ \Rightarrow ۳k^۲ + ۲۲k - ۲۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} k = ۱ \Rightarrow \frac{a}{d} = ۱ \Rightarrow a = d \\ k = -\frac{۲۵}{۳} \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

جملات دنبالهٔ حسابی مثبت می‌باشند. در نتیجه نسبت $\frac{a}{d}$ مثبت است. در نتیجه:

$$\frac{a_۲}{a_۱} = \frac{a+d}{a} = \frac{۲a}{a} = ۲$$

**قِلِقش رو یاد بگیر!**

میگی از کجا بفهمیم باید معادله درجه ۲ رو به $d^۲$ تقسیم کنیم؟ باید ببینی سوال چی رو میخواد! $\frac{a_۲}{a_۱} = ۱ + \frac{d}{a}$

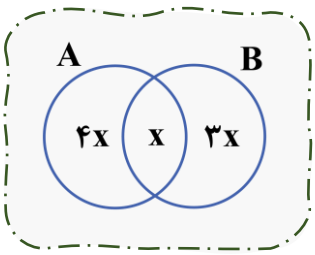
پس فقط کافیه نسبت $\frac{d}{a}$ رو حساب کنیم!

**۸- اگر $A$ و $B$ دو مجموعه و $n(A \cap B') = n(B) = ۴n(A \cap B)$ و $n(A \cup B) = ۲۴$ باشد، تعداد اعضای مجموعهٔ $B - A$ کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط به خط ـ سریع ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۱۲ و ۱۳ ـ ۱۰۰۱)

فرض کنیم $n(A \cap B) = x$ باشد، در این صورت نمودار ون به شکل مقابل خواهد بود:




$$n(A \cup B) = ۴x + x + ۳x = ۸x = ۲۴ \Rightarrow x = ۳$$
$$\Rightarrow n(B - A) = ۳x = ۹$$

۹- در دنبالهٔ حسابی $a_n$ با فرض $a_1+a_2+a_3=18$ و $a_2a_3=48$، واسطهٔ هندسی جملات اول و هفتم این دنباله کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

**پاسخ: گزینهٔ ۳** (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۲۲ و ۲۶ ـ ۱۲۰۲)

$$a_1+a_2+a_3=18 \Rightarrow a_1+a_1+d+a_1+2d=18$$

$$\Rightarrow 3a_1+3d=18 \Rightarrow \underbrace{a_1+d}_{a_2}=6 \Rightarrow a_2=6 \xrightarrow{a_2a_3=48} a_3=8$$

$$\begin{cases} a_2=6 \\ a_3=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+d=6 \\ a_1+2d=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=2 \\ a_1=4 \end{cases} \Rightarrow a_7=a_1+6d=16$$

پس واسطهٔ هندسی $a_1$ و $a_7$ برابر با $\pm\sqrt{a_1a_7}=\pm\sqrt{4\times16}=\pm8$ است که مقدار ۸ در گزینه‌ها آمده و جواب است.

ماز

۱- هرگاه در داده‌های ۴,۳,۶,۲,۵,۴,۶,۷,۴,۹,۸ اعداد بزرگ‌تر از چارک سوم و اعداد کوچک‌تر از چارک اول را حذف کنیم، میانگین اعداد مانده چه عددی است؟

۱) $\frac{۳۴}{۷}$ ۲) ۵/۵ ۳) ۵/۲۵ ۴) $\frac{۳۶}{۷}$

**پاسخ: گزینهٔ ۴** (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۶۱ ـ ۱۱۰۷)

**بررسی سریع:**

$$۲,۳,\underset{\text{چارک اول}}{۴},۴,۴,\underset{\text{میانه}}{۵},۶,۶,\underset{\text{چارک سوم}}{۷},۸,۹ \Rightarrow ۴,۴,۴,۵,۶,۶,۷ \Rightarrow \bar{x}=\frac{۳\times۴+۵+۲\times۶+۷}{۷}=\frac{۳۶}{۷}$$

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. ۲,۳,۴,۴,۴,۵,۶,۶,۷,۸,۹

چون تعداد داده‌ها ۱۱ تا است پس دادهٔ وسط (ششمین عدد) که برابر ۵ می‌باشد میانه را نشان می‌دهد. ۵ داده قبل و ۵ داده بعد از میانه قرار دارد که میانهٔ نیمهٔ اول همان چارک اول و میانهٔ نیمهٔ دوم همان چارک سوم است، بنابراین:

$$۲,۳,\underset{\text{چارک اول}}{۴},۴,۴,\underset{\text{میانه}}{۵},۶,۶,\underset{\text{چارک سوم}}{۷},۸,۹$$

داده‌های قبل از چارک اول و بعد از چارک سوم را حذف می‌کنیم. ببینید:

$$۴,۴,۴,۵,۶,۶,۷ \Rightarrow \text{میانگین } \bar{x}=\frac{۴+۴+۴+۵+۶+۶+۷}{۷}=\frac{۳۶}{۷}$$

**معیار پراکندگی داده‌ها**

**چارک‌ها:** اگر تعدادی داده داشته باشیم برای محاسبهٔ چارک داده‌ها، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. میانه همان چارک دوم $(Q_۲)$ می‌باشد. با مشخص کردن میانه، داده‌ها به دو نیمه تقسیم می‌شوند. میانهٔ نیمهٔ اول، همان چارک اول $(Q_۱)$ و میانهٔ نیمهٔ دوم، همان چارک سوم $(Q_۳)$ می‌باشد.

**نکته**

اگر تعداد داده‌ها $(n)$ فرد باشد، میانه دادهٔ شمارهٔ $\frac{n+۱}{۲}$ است و در هر نیمه از داده‌ها $\frac{n-۱}{۲}$ تا عدد داریم. مثلاً در ۱۳ داده، دادهٔ شمارهٔ $\frac{۱۳+۱}{۲}=۷$ میانه است و در هر نیمه $\frac{۱۳-۱}{۲}=۶$ داده داریم. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد میانه همان میانگین (معدل) داده‌های $\frac{n}{۲}$ و $\frac{n}{۲}+۱$ است و در هر طرف آن $\frac{n}{۲}$ داده داریم.

۲- میانگین اعداد $a,a+۲,a+۴,a+۶$ با واریانس آن‌ها برابر می‌باشد. مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

**پاسخ: گزینهٔ ۱** (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۵۸ ـ ۱۱۰۷)

**روش اول**

ابتدا میانگین داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x}=\frac{a+(a+۲)+(a+۴)+(a+۶)}{۴}=\frac{۴a+۱۲}{۴}=a+۳$$

حال به محاسبهٔ واریانس می‌پردازیم:

$$\sigma^۲=\frac{(\overset{۳}{\cancel{(a+۳)-(a)}})^۲+(\overset{۱}{\cancel{(a+۳)-(a+۲)}})^۲+(\overset{-۱}{\cancel{(a+۳)-(a+۴)}})^۲+(\overset{-۳}{\cancel{(a+۳)-(a+۶)}})^۲}{۴}=\frac{۹+۱+۱+۹}{۴}=۵$$

بنابراین:

$$\sigma^۲=\bar{x}\Rightarrow a+۳=۵\Rightarrow a=۲$$

**روش دوم**

چون داده‌ها تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند، طبق درسنامه داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}=\frac{a+(a+۶)}{۲}=a+۳\\ \sigma^۲=\frac{n^۲-۱}{۱۲}d^۲\Rightarrow\sigma^۲=\frac{۴^۲-۱}{۱۲}\times۲^۲=\frac{۱۵}{۱۲}\times۴=۵\end{array}\right\}\Rightarrow\bar{x}=\sigma^۲\Rightarrow a+۳=۵\Rightarrow a=۲$$

**فرمول‌های اصلی آمار**

اگر $x_۱,x_۲,x_۳,...,x_n$ داده‌های آماری باشند، آن‌گاه:

۱) میانگین $\Rightarrow\bar{x}=\frac{x_۱+x_۲+...+x_n}{n}$

۲) دامنهٔ تغییرات $\Rightarrow R=x_{max}-x_{min}=$ بزرگ‌ترین داده $-$ کوچک‌ترین داده

۳) واریانس $\Rightarrow\sigma^۲=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+...+(x_n-\bar{x})^۲}{n}$ یا $\sigma^۲=\frac{x_۱^۲+x_۲^۲+...+x_n^۲}{n}-\bar{x}^۲$

۴) انحراف معیار $\Rightarrow\sigma=\sqrt{\text{واریانس}}$

۵) ضریب تغییرات $\Rightarrow CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$

**اگر داده‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند:**

میانگین داده‌ها برابر میانگین ۲ جملهٔ متساوی‌الفاصله از دو طرف است.

$$\bar{x}=\frac{x_۱+x_n}{۲}=\frac{x_۲+x_{n-۱}}{۲}=...$$

اگر تعداد داده‌ها برابر n و قدرنسبت داده‌ها d باشد، واریانس برابر است با: $\sigma^۲=\frac{n^۲-۱}{۱۲}\times d^۲$

**یه نمونهٔ باحال ببین**

واریانس داده‌های $۱,۴,۷,۱۰,۱۳,۱۶,۱۹$ را محاسبه کنید.

$$\bar{x}=\frac{۱+۱۹}{۲}=۱۰\Rightarrow\sigma^۲=\frac{۷^۲-۱}{۱۲}\times۳^۲=\frac{۴۸}{۱۲}\times۹=۳۶$$

۳- کدام دسته از متغیرها به ترتیب، کمی گسسته، کیفی اسمی و کیفی ترتیبی است؟

۱) شاخص تودهٔ بدن، گروه خونی، جنسیت

۲) تعداد تماشاگرهای یک مسابقه، گروه خونی، قد افراد

۳) تعداد شهرهای یک استان، نژاد افراد، سطح تحصیلات

۴) وزن افراد، مراحل رشد یک انسان، میزان بارندگی

**پاسخ: گزینهٔ ۳** (آسان ـ خط به خط ـ سریع ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۱۶۷ ـ ۱۰۰۷)

کمی پیوسته: شاخص تودهٔ بدن، وزن افراد، قد افراد

کمی گسسته: تعداد تماشاگرهای یک مسابقه، تعداد شهرهای یک استان

کیفی اسمی: گروه خونی، جنسیت، نژاد افراد

کیفی ترتیبی: سطح تحصیلات، مراحل رشد یک انسان

با توجه به دسته‌بندی‌های گفته شده گزینهٔ ۳ پاسخ صحیح می‌باشد.

**انواع متغیرهای کمی**

**متغیر کمی پیوسته**: متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین a و b را نیز بتواند به خود بگیرد، مثلاً قد یک فرد می‌تواند ۱/۶ متر، ۱/۷ متر و یا هر عددی بین این دو رقم باشد.

**یه نمونه بگم؟**

سرعت خودرو، وزن افراد، شاخص تودهٔ بدنی، دمای هوا در قلهٔ کوه و ...

**متغیر کمی گسسته:** متغیری است که پیوسته نباشد (نه بابا! عجب نکته خفنی)

**اینم یه نمونهٔ دیگه**

تعداد دانش‌آموزان یک مدرسه، تعداد سوالات کنکور ....

**انوع متغیرهای کیفی**

**متغیر کیفی ترتیبی:** متغیری است که نوعی ترتیب طبیعی دارد.

**چنتا نمونه ببینیم**

ـ سطح تحصیلات یک فرد (دیپلم، فوق دیپلم، کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری)

ـ مراحل رشد انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میانسال، کهن‌سال)

ـ میزان هوش یک فرد (زیاد، متوسط، کم)

ـ مقام یک ورزشکار در مسابقه (اول، دوم، سوم و ...)

**متغیر کیفی اسمی:** به متغیر کیفی که ترتیبی نباشد، متغیر کیفی اسمی می‌گوییم.

**یه نمونهٔ باحال**

جنسیت افراد (زن و مرد)، انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی و برفی)

**نکته**

بعضی وقتا شناسایی نوع متغیر کمی پیچیده می‌شه و برای تشخیص اون باید به نوع بیان اون متغیر دقت کنیم. مثلاً در مورد بارندگی می‌توانیم متغیرهای پایین رو تعریف کنیم:

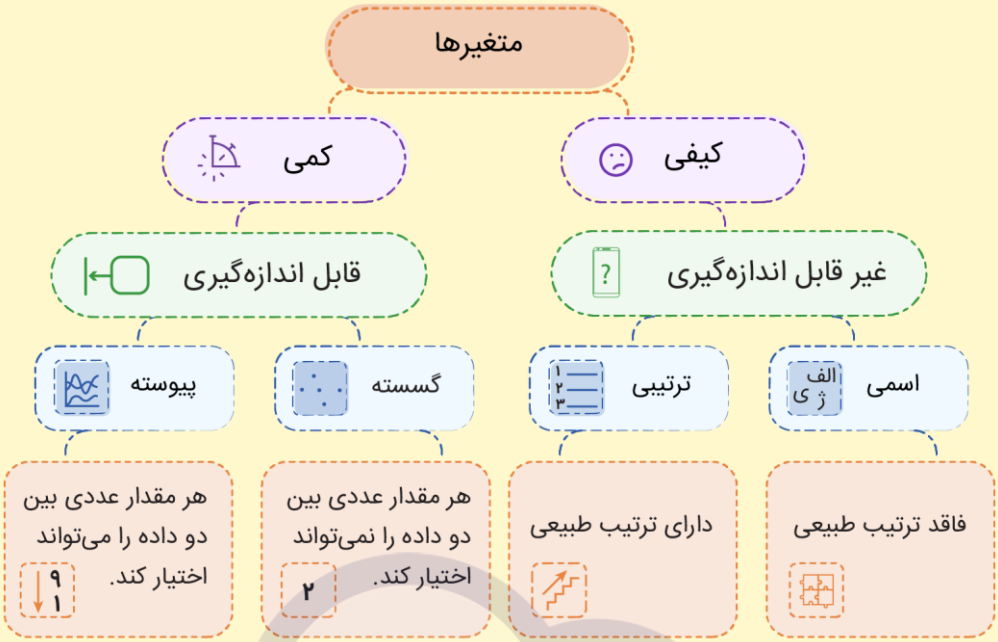
**میزان بارندگی:** یک متغیر کمی پیوسته است، چرا که میزان بارندگی همواره به صورت عددی بیان شده و می‌تواند هر مقداری را داشته باشد.

**شدت بارندگی:** یک متغیر کیفی ترتیبی است، چرا که شدت بارندگی می‌تواند به صورت کم، متوسط و زیاد بیان شود.

**نوع بارندگی:** یک متغیر کیفی اسمی است، چرا که نوع بارندگی می‌تواند به صورت باران، برف و ... باشد.

حالا به کمک چیزایی که گفتیم، به نظرت میزان آلودگی، شدت آلودگی و نوع آلودگی چه متغیرهایی هستن؟!

اگر پایه باشین یه جمع بندی از این قسمت بکنیم تا مطالب تو مغزمون بهتر دسته بندی بشن!




**۴- واریانس اعداد طبیعی و یک رقمی فرد چند برابر واریانس اعداد طبیعی و یک رقمی زوج است؟**

۱) ۱/۶ ۲) ۰/۶۲۵ ۳) ۱/۲ ۴) ۰/۷۲

**پاسخ: گزینهٔ ۱** (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۵۹ ـ ۱۱۰۷)

**بررسی سریع:**

اعداد طبیعی و یک رقمی فرد $\Rightarrow 1,3,5,7,9 \Rightarrow \sigma_1^2 = \frac{5^2-1}{12} \times 2^2 = 8$

اعداد طبیعی و یک رقمی زوج $\Rightarrow 2,4,6,8 \Rightarrow \sigma_2^2 = \frac{4^2-1}{12} \times 2^2 = 5$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{8}{5} = 1/6$$

اعداد طبیعی و یک رقمی زوج و فرد را جداگانه می‌نویسیم. ببینید:

اعداد طبیعی و یک رقمی فرد $\Rightarrow 1,3,5,7,9$

اعداد طبیعی و یک رقمی زوج $\Rightarrow 2,4,6,8$

$\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12} \times d^2$

$\sigma_1^2 = \frac{5^2-1}{12} \times 2^2 = 8$

$\sigma_2^2 = \frac{4^2-1}{12} \times 2^2 = 5$

بنابراین جواب برابر است با: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{8}{5} = 1/6$

**تذکر**

به عنوان تمرین با روش اصلی، واریانس هر دو دسته از اعداد را محاسبه کنید.

۵- اگر از مجموعهٔ $A=\{۲,۴,۶,۸,...,۹۶,۹۸\}$ سه عدد زوج متوالی انتخاب کنیم، کم‌ترین مقدار ضریب تغییرات چه عددی است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۷۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲۸۸}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۱۴۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲۴}$

**پاسخ: گزینهٔ ۳** (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۶۰ ـ ۱۱۰۷)

می‌دانیم هر ۳ عدد زوج متوالی که انتخاب کنیم، میانگین همان عدد وسطی است. به عنوان مثال ۳عدد زوج متوالی را a، b و c در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$a,b,c \Rightarrow \bar{x}=b \Rightarrow \text{واریانس}\ \sigma^۲=\frac{(\overset{-۲}{\cancel{a-b}})^۲+(\overset{۰}{\cancel{b-b}})^۲+(\overset{۲}{\cancel{c-b}})^۲}{۳}=\frac{۸}{۳} \Rightarrow \sigma=\sqrt{\frac{۸}{۳}}$$

بنابراین انحراف معیار هر ۳عدد زوج متوالی برابر $\sqrt{\frac{۸}{۳}}$ است، پس هر چقدر میانگین بیشتر باشد، ضریب تغییرات کم‌تر است. ببینید:

$$۹۴,۹۶,۹۸ \Rightarrow \bar{x}_{max}=۹۶ \Rightarrow CV_{min}=\frac{\sigma}{\bar{x}_{max}}=\frac{\sqrt{\frac{۸}{۳}}}{۹۶}=\frac{\sqrt{۸}}{۹۶\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۹۶\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴۸\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۶}}{۴۸\times ۳}=\frac{\sqrt{۶}}{۱۴۴}$$

۶- در چهار داده آماری، میانگین برابر ۳ و واریانس برابر ۲/۵ است. اگر ۶ داده برابر میانگین به آن‌ها اضافه کنیم، واریانس ۱۰ دادهٔ به دست آمده، چه عددی است؟

۱) $\frac{۶}{۱۰}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۴}{۱۰}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

**پاسخ: گزینهٔ ۲** (متوسط ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۶۰ ـ ۱۱۰۷)

۴دادهٔ اولیه را $x_۱,x_۲,x_۳,x_۴$ می‌نامیم. بنابراین:

$$\sigma^۲=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+(x_۳-\bar{x})^۲+(x_۴-\bar{x})^۲}{۴}=۲/۵$$

$$\Rightarrow (x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+(x_۳-\bar{x})^۲+(x_۴-\bar{x})^۲=۱۰$$

حال اگر ۶ دادهٔ مساوی با میانگین اضافه کنیم، در این صورت داده‌ها به صورت زیر هستند:

$$x_۱,x_۲,x_۳,x_۴,\underbrace{\bar{x},\bar{x},...,\bar{x}}_{۶\text{ تا}}$$

بنابراین واریانس این ۱۰ داده برابر است با:

$$\sigma'^۲=\frac{\overbrace{(x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+(x_۳-\bar{x})^۲+(x_۴-\bar{x})^۲}^{۱۰}+\overbrace{۶(\bar{x}-\bar{x})^۲}^{۰}}{۱۰}=\frac{۱۰}{۱۰}=۱$$

**تذکر**

توجه کنید که اگر n داده برابر با میانگین به داده‌ها اضافه یا کم کنیم، میانگین تغییری نمی‌کند.

۷- هشت دادهٔ آماری با میانگین ۶ وجود دارد به طوری‌که میانگین مربع آن‌ها ۵۲ می‌باشد. ضریب تغییرات این هشت عدد کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

**پاسخ: گزینهٔ ۴** (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۶۰ ـ ۱۱۰۷)

می‌توانیم برای محاسبهٔ واریانس از رابطهٔ $\sigma^۲ = \frac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + ... + x_n^۲}{n} - \bar{x}^۲$ استفاده کنیم. ببینید:

$$x_۱, x_۲, x_۳, ..., x_۸ \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = ۶ \\ \text{میانگین مربع ۸ عدد}: \frac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + ... + x_۸^۲}{۸} = ۵۲ \end{cases} \Rightarrow \sigma^۲ = \frac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + ... + x_۸^۲}{۸} - \bar{x}^۲$$

$$\Rightarrow \sigma^۲ = ۵۲ - ۶^۲ \Rightarrow \sigma^۲ = ۱۶ \Rightarrow \sigma = ۴$$

بنابراین ضریب تغییرات این ۸ داده برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

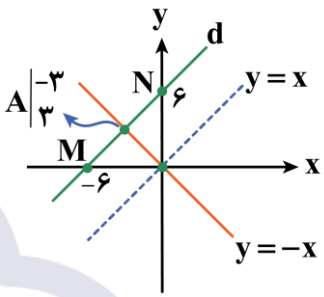
۱- خط $d$ موازی نیمساز ناحیه اول و سوم مختصات بوده و نیمساز ناحیه دوم را در نقطه‌ای به طول $x=-۳$ قطع می‌کند. مساحت ناحیه محدود به این خط و محورهای مختصات در ناحیه دوم چقدر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

**پاسخ: گزینهٔ ۳** (آسان ـ ترکیبی ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۲ و ۳ ـ ۱۱۰۱)

نقطهٔ $A$ به طول $-۳$ روی نیمساز ناحیهٔ دوم است پس مختصات آن به صورت $A(-۳,۳)$ است. از طرفی شیب خط $d$ برابر ۱ است پس معادلهٔ خط $d$ برابر است با:

$$\begin{matrix} m_d = ۱ \\ A(-۳,۳) \end{matrix} \Rightarrow y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - ۳ = ۱(x + ۳) \Rightarrow y = x + ۶$$



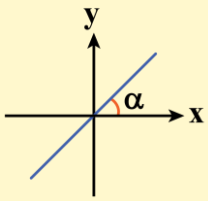

بنابراین مساحت ناحیهٔ محدود به خط $d$ و محورهای مختصات در ناحیهٔ دوم برابر است با:

$$S = \frac{۶ \times ۶}{۲} = ۱۸$$

**شیب خط**

شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

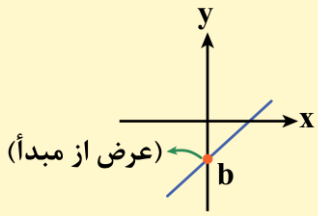



**شیب** یک خط برابر است با $\tan$ **زاویه‌ای** که آن خط **با جهت مثبت محور $x$ها** می‌سازد.

$$\text{شیب خط} = \tan\alpha$$

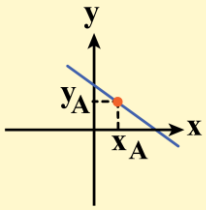
### نوشتن معادلهٔ خط

**۱)** با داشتن شیب و عرض از مبدأ خط



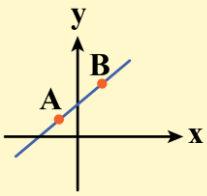

$$y = ax + b$$

**۲)** با داشتن شیب و یک نقطه از خط




$$y - y_A = m(x - x_A)$$

**۳)** با داشتن دو نقطه از خط



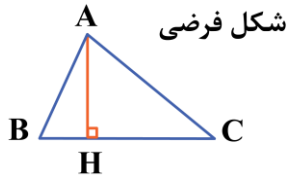

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\ ,\ y - y_B = m(x - x_B)$$

**۲-** مثلث **ABC** با رأس‌های **A(۳,۵)**، **B(۲,۲)** و **C(۵,−۱)** را در نظر بگیرید. اندازهٔ ارتفاع وارد بر ضلع **BC** در این مثلث چقدر است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

**پاسخ: گزینهٔ ۴** (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۹ ـ ۱۱۰۱)

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:




معادلهٔ ضلع BC را می‌نویسیم و فاصلهٔ A را از آن محاسبه می‌کنیم:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-۱ - ۲}{۵ - ۲} = -۱$$

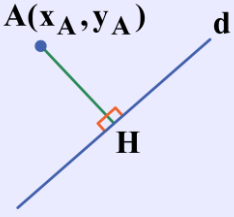
$$\text{معادلهٔ BC}: y - y_B = m(x - x_B) \Rightarrow y - ۲ = -۱(x - ۲) \Rightarrow y + x - ۴ = ۰$$

حال فاصلهٔ A از ضلع BC را به دست می‌آوریم:

$$AH = \frac{|۳ + ۵ - ۴|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

### فاصلهٔ نقطه از خط

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ از خط $d: ax + by + c = ۰$ برابر است با:



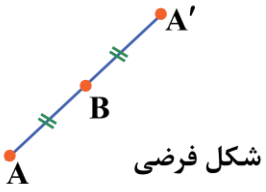

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

۳- قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,۳)$ نسبت به نقطهٔ $B(-۱,۲)$ را $A'$ می‌نامیم. اگر قرینهٔ نقطهٔ $A'$ نسبت به مبدأ را $A''$ بنامیم، طول پاره‌خط $AA''$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

**پاسخ: گزینهٔ ۴** (آسان ـ ترکیبی ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۷ ـ ۱۱۰۱)

قرینهٔ نقطهٔ $A$ نسبت به نقطهٔ $B$، همان $A'$ است. پس $B$ وسط $A$ و $A'$ است. بنابراین:



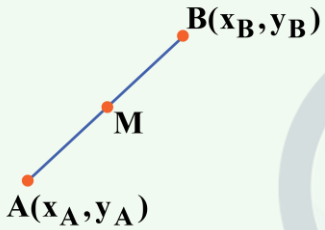
شکل فرضی

$$B=\frac{A+A'}{۲}\Rightarrow A+A'=۲B\Rightarrow A'=۲B-A\Rightarrow\begin{cases}x_{A'}=۲x_B-x_A=۲\times(-۱)-۲=-۴\\ y_{A'}=۲y_B-y_A=۲\times۲-۳=۱\end{cases}\Rightarrow A'(-۴,۱)$$

از طرفی قرینهٔ نقطهٔ $A'(-۴,۱)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطهٔ $A''(۴,-۱)$ می باشد و داریم:

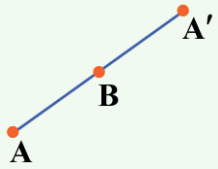
$$AA''=\sqrt{(۴-۲)^۲+(-۱-۳)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}=\sqrt{۴\times۵}=۲\sqrt{۵}$$

### مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط




$$M\left(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲}\right)$$

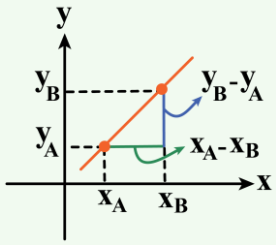
اگر $A'$ قرینهٔ نقطهٔ $A$ نسبت به نقطهٔ $B$ باشد برای محاسبهٔ مختصات $A'$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:




$$\frac{A+A'}{۲}=B\Rightarrow A'=۲B-A\Rightarrow\begin{cases}x_{A'}=۲x_B-x_A\\ y_{A'}=۲y_B-y_A\end{cases}$$

### فاصلهٔ دو نقطه

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ از یکدیگر برابر است با:




$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$

**فاصلهٔ دونقطهٔ هم‌عرض:**

$$A\begin{vmatrix}x_A\\k\end{vmatrix},B\begin{vmatrix}x_B\\k\end{vmatrix}\Rightarrow|AB|=|x_A-x_B|$$

**فاصلهٔ دو نقطهٔ هم‌طول:**

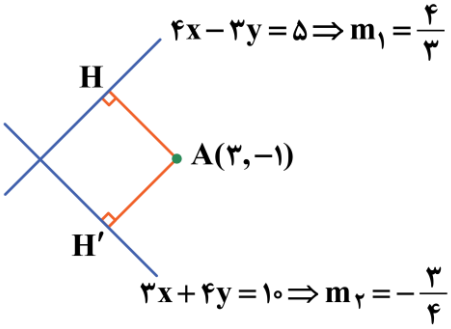
$$A\begin{vmatrix}k\\y_A\end{vmatrix},B\begin{vmatrix}k\\y_B\end{vmatrix}\Rightarrow|AB|=|y_A-y_B|$$

۴- دو ضلع یک مستطیل بر دو خط به معادلات $۳x+۴y=۱۰$ و $۴x-۳y=۵$ قرار دارند. اگر $A(۳,-۱)$ یک رأس این مستطیل باشد، محیط مستطیل کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۲

**پاسخ: گزینهٔ ۳** (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۸ و ۹ ـ ۱۱۰۱)

دو خط داده شده بر هم عمودند، زیرا شیب‌های دو خط، قرینه و معکوس یکدیگرند.




نقطهٔ $A(۳,-۱)$ روی هیچ‌کدام از این دو خط قرار ندارد.

فاصلهٔ نقطهٔ A از دو خط، طول و عرض مستطیل را نشان می‌دهد.

$$AH=\frac{|۴\times ۳-۳\times(-۱)-۵|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۲+۳-۵}{۵}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

$$AH'=\frac{|۳\times ۳+۴\times(-۱)-۱۰|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{|۹-۴-۱۰|}{۵}=\frac{۵}{۵}=۱$$

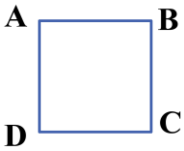
بنابراین محیط مستطیل برابر است با: محیط مستطیل $=۲$ (طول + عرض) $=۲(۲+۱)=۶$

۵- نقاط $A(۱,۱)$، $B(a,b)$ و $C(-۲,۰)$ سه رأس مربع ABCD هستند. مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۳- ۴) $-\frac{۵}{۲}$

**پاسخ: گزینهٔ ۲** (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۹ ـ ۱۱۰۱)

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:




توجه کنید دو شرط $AB=BC$ و $AB\perp BC$ را بررسی می‌کنیم:

۱) $AB^۲=BC^۲\Rightarrow(a-۱)^۲+(b-۱)^۲=(a+۲)^۲+(b-۰)^۲$

$$\Rightarrow a^۲-۲a+۱+b^۲-۲b+۱=a^۲+۴a+۴+b^۲$$
$$\Rightarrow ۶a=-۲b-۲\Rightarrow ۳a=-b-۱\Rightarrow b=-۱-۳a \quad (I)$$

۲) $AB\perp BC\Rightarrow m_{AB}\times m_{BC}=-۱\Rightarrow\frac{b-۱}{a-۱}\times\frac{b-۰}{a+۲}=-۱\Rightarrow b^۲-b=-a^۲-a+۲$

جای‌گذاری I $\rightarrow (-۳a-۱)^۲-(-۳a-۱)=-a^۲-a+۲\Rightarrow ۹a^۲+۶a+۱+۳a+۱=-a^۲-a+۲$

$$\Rightarrow ۱۰a^۲+۱۰a=۰\Rightarrow ۱۰a(a+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۰\\a=-۱\end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر قابل قبول برای a، برابر $-۱$ است.

**جرقهٔ ذهنی**

اگر دو رأس A و C را به هم وصل کنیم، آن‌گاه دو رأس دیگر یعنی B و D روی عمودمنصف پاره‌خط AC قرار می‌گیرند. حال با توجه به اینکه برای مختصات رأس‌ها داریم $A+C=B+D$ پس می‌توان گفت:

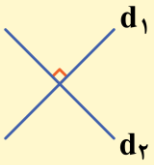
$$۱+(-۲)=a+a'=-۱$$

دقت کنید که رأس B و D می‌توانند به دو حالت دو طرف AC قرار گیرند پس $a'$ مقدار دومیست که a می‌تواند داشته باشد.

### خطوط عمود بر هم

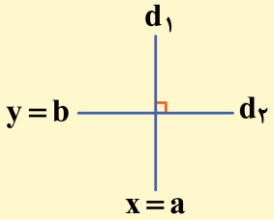
اگر دو خط غیرموازی با محورهای مختصات، بر هم عمود باشند شیب‌هایشان قرینه و معکوس یکدیگر می‌باشد، یعنی حاصل‌ضرب شیب دو خط $-۱$ است.

$$d_۱ \perp d_۲ \Rightarrow m_{d_۱} \times m_{d_۲} = -۱$$



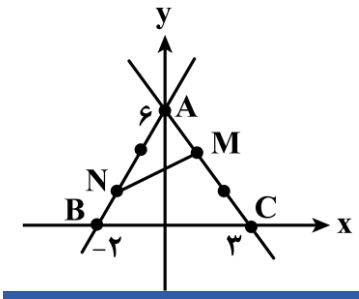

**حالت خاص:**

خط $x = a$ که موازی محور $y$ بوده همواره بر خط $y = b$ که موازی محور $x$ است، عمود می‌باشد.




**مثال**

۶- در شکل مقابل، $\frac{MC}{AM} = \frac{AN}{BN} = ۲$ است. شیب پاره‌خط MN کدام است؟




۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۶}{۷}$

۴) $\frac{۵}{۶}$

**پاسخ: گزینهٔ ۳** (سخت ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ⏲ ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۷ ـ ۱۱۰۱)

به کمک رابطهٔ موجود در درسنامه، مختصات نقاط M و N را به دست می‌آوریم. ببینید:

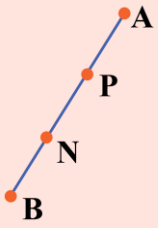
$$N = \frac{۲\times B + A}{۳} = \frac{۲\times(-۲,۰) + (۰,۶)}{۳} = (-\frac{۴}{۳}, ۲)$$

$$M = \frac{۱\times C + ۲\times A}{۳} = \frac{۱\times(۳,۰) + ۲\times(۰,۶)}{۳} = (۱, ۴)$$

$$\Rightarrow m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{۲-۴}{-\frac{۴}{۳} - ۱} = \frac{-۲}{-\frac{۷}{۳}} = \frac{۶}{۷}$$

**توجه!**

برای محاسبهٔ مختصات نقطهٔ N، می‌توان به صورت زیر نیز عمل کرد:




$$P = \frac{A + N}{۲} \Rightarrow A + N = ۲P$$

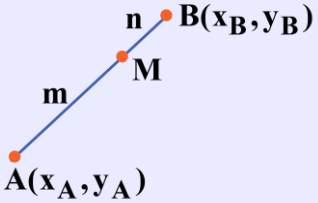
$$N = \frac{P + B}{۲} \Rightarrow P + B = ۲N$$

$$\begin{cases} A + N = ۲P \\ ۲P + ۲B = ۴N \end{cases} \Rightarrow A + ۲B = ۳N \Rightarrow N = \frac{A + ۲B}{۳}$$

در ادامه باید مختصات نقاط داده شده را در رابطهٔ به دست آمده قرار داد و به طریق مشابه مختصات نقطهٔ M را نیز پیدا کرد. سپس شیب پاره‌خط خواسته شده را محاسبه کرد.

### مختصات نقطه روی پاره‌خط

اگر نقطهٔ M روی پاره‌خط AB آن را به نسبت m به n تقسیم کند، آن‌گاه:




$$M = \frac{n\times A + m\times B}{m+n} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{n\times x_A + m\times x_B}{m+n} \\ y_M = \frac{n\times y_A + m\times y_B}{m+n} \end{cases}$$

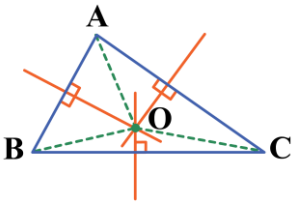
۷- فاصلهٔ کدام نقطه از سه رأس مثلث ABC همواره یکسان است؟

۱) تلاقی سه میانه ۲) تلاقی سه ارتفاع ۳) تلاقی سه نیمساز ۴) تلاقی سه عمودمنصف

**پاسخ: گزینهٔ ۴** (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۳۰ ـ ۱۱۰۲)

هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

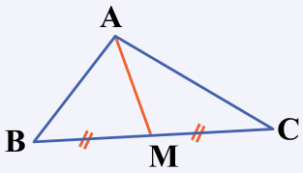
بنابراین نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های هر ۳ ضلع، از هر سه رأس مثلث به یک فاصله است.



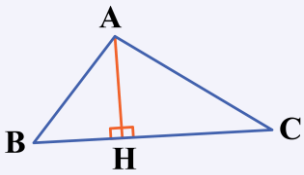

$$OA = OB = OC$$

**در یک مثلث**

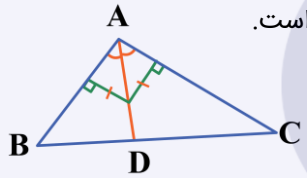
**میانه:** پاره‌خطی است که از رأس مثلث گذشته و ضلع مقابل را نصف می‌کند.



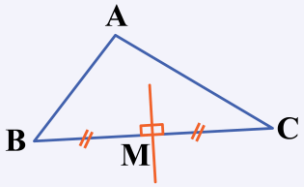

**ارتفاع:** پاره‌خطی است که از رأس مثلث گذشته و بر ضلع مقابل عمود است.



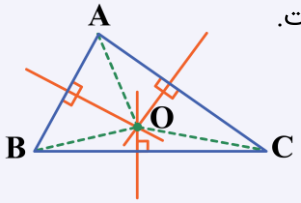

**نیمساز:** پاره‌خطی است گذرنده از رأس مثلث که زاویهٔ رأس را نصف کرده و از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.




**عمودمنصف:** خطی است که بر ضلع مثلث عمود بوده و آن را نصف می‌کند و الزاماً از رأس مثلث نمی‌گذرد.

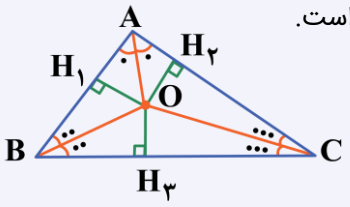



محل **برخورد عمودمنصف‌های اضلاع** یک مثلث نقطه‌ای است که از هر ۳ رأس مثلث به یک فاصله است.




$$OA = OB = OC$$

محل **برخورد نیمسازهای زوایای درونی** یک مثلث نقطه‌ای است که از هر ۳ ضلع مثلث به یک فاصله است.




$$OH_1 = OH_2 = OH_3$$

۸- نقاط A و B در یک طرف خط d واقع بوده و همگی در یک صفحه قرار دارند. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از A و B به یک فاصله باشد؟

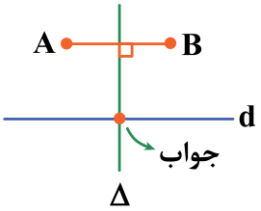
۱) یک ۲) دو ۳) یک یا هیچ ۴) یک یا بی‌شمار

**پاسخ: گزینهٔ ۳** (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۲۶ و ۲۷ ـ ۱۱۰۲)

مجموعه نقاطی که از نقطهٔ A و نقطهٔ B به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. نقطهٔ برخورد عمودمنصف AB با خط d جواب سوال است. می‌دانیم نقاط A و B نسبت به خط d، سه حالت دارند، پس:

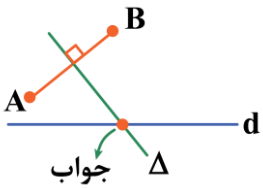
الف) AB موازی d است:

عمودمنصف AB، خط d را در یک نقطه قطع می‌کند یعنی مسئله یک جواب دارد.




ب) AB نه موازی با d و نه عمود بر d است:

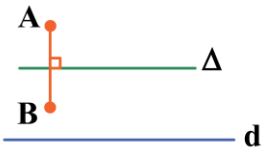
عمودمنصف AB، خط d را در یک نقطه قطع می‌کند یعنی مسئله یک جواب دارد.




ج) AB عمود بر d است:

عمودمنصف AB خط d را قطع نمی‌کند یعنی مسئله جواب ندارد.

پس مسئله یا یک جواب دارد و یا جواب ندارد.




۹- مثلث ABC در رأس A قائمه است. چند نقطه روی اضلاع مثلث وجود دارد که از رأس A و وتر BC به یک فاصله باشد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

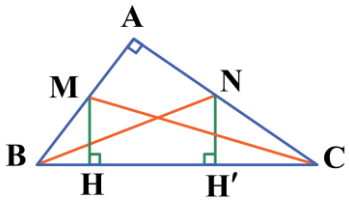
**پاسخ: گزینهٔ ۳** (متوسط ـ ترکیبی ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۱۰۲)

فرض کنید M روی AB دارای چنین ویژگی باشد که MA با MH برابر است.

پس M روی نیمساز زاویهٔ $\hat{C}$ است.

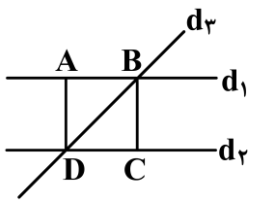
به طور مشابه N روی AC محل برخورد نیمساز $\hat{B}$ با AC است.

پس دو نقطه با شرایط مذکور وجود دارد.




۱۰- در شکل مقابل، ABCD مربع است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از هر سه خط $d_1$، $d_2$ و $d_3$ به یک فاصله باشد؟

۱) یک
۲) دو
۳) سه
۴) چهار

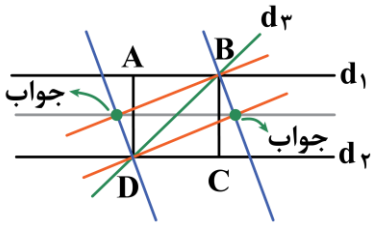


**پاسخ: گزینهٔ ۲** (سخت ـ ترکیبی ـ استاندارد ⏱ ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۲۸ و ۲۹ ـ ۱۱۰۲)

مجموعه نقاطی از صفحه که از خط $d_1$ و $d_2$ به یک فاصله‌اند، روی خطی قرار دارد که موازی $d_1$ و $d_2$ بوده و از وسط آن‌ها می‌گذرد.

مجموعه نقاطی از صفحه که از $d_1$ و $d_3$ به یک فاصله‌اند، نیمساز زوایای بین $d_1$ و $d_3$ می‌باشد.

در مورد $d_2$ و $d_3$ نیز چنین است.




جواب همان نقاط برخورد نیمسازهای زوایای بین $d_1$ و $d_3$ و یا $d_2$ و $d_3$ با خطی است که از وسط $d_1$ و $d_2$ به موازات آن‌ها رسم می‌شود. چون نیمسازها دو خط موازی $d_1$ و $d_2$ را قطع می‌کند حتماً هر خط موازی آن‌ها را نیز قطع می‌کند، پس دو جواب داریم.

**تذکر**

دقت کنید که نیمسازهای داخلی و خارجی بین $d_1$ و $d_3$ و همچنین بین $d_2$ و $d_3$ دوبه‌دو موازی‌اند.

۱۱- نقاط $A(۲,-۱)$ و $B(۰,۲)$ مفروضند. معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $۲x-۳y=\frac{۱}{۲}$
۲) $۲x-۳y=-\frac{۱}{۲}$
۳) $۲x+۳y=\frac{۱}{۲}$
۴) $۲x+۳y=-\frac{۱}{۲}$

**پاسخ: گزینه ۱** (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

ابتدا مختصات M وسط پاره‌خط AB را به دست می‌آوریم:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۲+۰}{۲}=۱$$
$$y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{-۱+۲}{۲}=\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow M(۱,\frac{۱}{۲})$$

شیب پاره‌خط AB برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{-۱-۲}{۲-۰}=-\frac{۳}{۲}$$

عمودمنصف AB (خط $\ell$) بر AB عمود است. بنابراین:

$$m_\ell \times m_{AB}=-۱\Rightarrow m_\ell=\frac{۲}{۳}$$

$\ell$ از $M(۱,\frac{۱}{۲})$ عبور کرده و شیب آن $\frac{۲}{۳}$ است.

$$\ell: y-\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{۳}(x-۱)\Rightarrow ۳y-\frac{۳}{۲}=۲x-۲\Rightarrow ۲x-۳y=\frac{۱}{۲}$$

**تالیفی**

عرض از مبدأ خط گذرا بر نقطه $(-۱,۵)$ و عمود بر خط $y=۲x+۱$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

## گروه آموزشی ماز

۱۲- فاصلهٔ نقطهٔ $A(a,۲)$ واقع در ناحیهٔ دوم مختصات، از خط $۳x-۴y=۱$ برابر ۳ است. فاصلهٔ A از مبدأ مختصات چقدر است؟ مشابه تمرین کتاب درسی

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۱۷}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۱۷}$

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

**فاصله نقطه از خط رو چطور به‌دست میارن؟**

فاصله نقطه $A(x_۰,y_۰)$ از خط به معادله $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

فاصلهٔ $A(a,۲)$ از خط $۳x-۴y-۱=۰$ برابر است با:

$$AH=\frac{|۳a-۸-۱|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۳\Rightarrow\frac{|۳a-۹|}{۵}=۳\Rightarrow|a-۳|=۵$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=۸ \text{ غ‌ق‌ق} & (A \text{ در ناحیه دوم و } a<۰ \text{ است})\\ a=-۲\ \checkmark\Rightarrow A(-۲,۲)\end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$OA=\sqrt{(-۲)^۲+۲^۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

**تالیفی**

دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $۲y+x=۶$ و $۲x-y=۷$ یک رأس مستطیل نقطه $A(۸,۵)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) ۷/۲ ۲) ۹/۶ ۳) ۱۱/۴ ۴) ۱۲/۸

## گروه آموزشی ماز

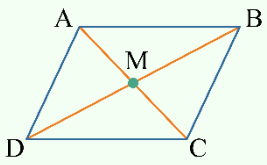
۱۳- نقاط $A(۱,۲)$ و $B(-۲,۳)$ و $C(-۳,۰)$ رئوس متوازی‌الاضلاع ABCD می‌باشند. کدام نقطه بر خطی که از رأس D عبور کرده و با قطر AC موازی است، قرار دارد؟

۱) $(۲,۳)$ ۲) $(۲,۲)$ ۳) $(۲,۰)$ ۴) $(۲,۱)$

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

**مختصات مرکز متوازی‌الاضلاع!**

با توجه به اینکه در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند می‌توان نتیجه گرفت:




$$x_M=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{x_B+x_D}{۲}\Rightarrow x_A+x_C=x_B+x_D$$

$$y_M=\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{y_B+y_D}{۲}\Rightarrow y_A+y_C=y_B+y_D$$

ابتدا مختصات رأس D را به دست می‌آوریم:

$$C(-۳,۰)\ ,\ B(-۲,۳)\ ,\ A(۱,۲)$$

$$\left.\begin{aligned}x_D+x_B=x_A+x_C\Rightarrow x_D-۲=۱-۳\Rightarrow x_D=۰\\ y_D+y_B=y_A+y_C\Rightarrow y_D+۳=۲+۰\Rightarrow y_D=-۱\end{aligned}\right\}\Rightarrow D(۰,-۱)$$

شیب قطر AC برابر است با:

$$m_{AC}=\frac{۲-۰}{۱+۳}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین شیب خط موازی با AC نیز برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

معادلهٔ خط خواسته شده:

$$y-(-۱)=\frac{۱}{۲}(x-۰)\Rightarrow y=\frac{x}{۲}-۱$$

نقطهٔ $(۲,۰)$ بر این خط واقع است.

گروه آموزشی ماز

**۱۴- دو ضلع مربعی بر خطوط $\frac{x}{۲}+\frac{۲y}{۳}=۱$ و $\frac{x}{۴}+\frac{y}{۳}=۱$ قرار دارند. طول ضلع مربع چقدر است؟**

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۶}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱۲}{۵}$

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

**فاصله دو خط موازی**

$$\begin{cases} ax+by=c \\ ax+by=c' \end{cases} \Rightarrow d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

شیب دو خط داده شده برابر است. فاصلهٔ بین این دو خط اندازهٔ ضلع مربع می‌باشد. دو طرف معادلهٔ $\frac{x}{۲}+\frac{۲y}{۳}=۱$ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} \frac{x}{۴}+\frac{y}{۳}=\frac{۱}{۲} \\ \frac{x}{۴}+\frac{y}{۳}=۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow d=\frac{\left|۱-\frac{۱}{۲}\right|}{\sqrt{\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۹}}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\sqrt{\frac{۲۵}{۹\times ۱۶}}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۵}{۳\times ۴}}=\frac{۶}{۵}$$

**تالیفی**

دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $۲x-۲y=۳$ و $y=x+۱$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۲۵}{۸}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴}$

گروه آموزشی ماز

**۱۵- نقطهٔ برخورد دو قطر یک مربع به معادلات $۲x+۳y=۰$ و $ax+۲y=۱۳$ بر روی دایره‌ای به مرکز $A(۳,-۲)$ قرار دارد. مساحت این دایره کدام است؟**

۱) $۵۰\pi$ ۲) $۵۲\pi$ ۳) $۵۴\pi$ ۴) $۵۶\pi$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

**فاصله دو نقطه**

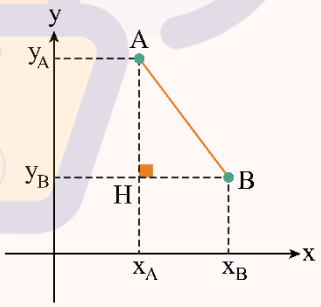
$$A\begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix}$$

$$AB^۲=BH^۲+AH^۲=(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲$$

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$

اگر A و B هم‌عرض باشند. $AB=|x_A-x_B|$

اگر A و B هم‌طول باشند. $AB=|y_A-y_B|$




اقطار مربع بر هم عمودند:

$$\left.\begin{matrix} ۲x+۳y=۰ \Rightarrow m_۱=-\frac{۲}{۳} \\ ax+۲y=۱۳ \Rightarrow m_۲=\frac{-a}{۲} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{m_۱m_۲=-۱} \frac{-۲}{۳}\left(-\frac{a}{۲}\right)=-۱ \Rightarrow a=-۳$$

حال محل برخورد اقطار را به دست می‌آوریم.

$$\begin{matrix} ۳\times \\ ۲\times \end{matrix}\left\{\begin{matrix} ۲x+۳y=۰ \\ -۳x+۲y=۱۳ \end{matrix}\right.$$

$$۱۳y=۲۶ \Rightarrow y=۲ \Rightarrow x=-۳ \Rightarrow P(-۳,۲)$$

نقطهٔ $P(-۳,۲)$ بر دایره‌ای به مرکز $A(۳,-۲)$ قرار دارد.

$$\text{شعاع دایره}=R=AP=\sqrt{(۳-(-۳))^۲+(-۲-۲)^۲}=\sqrt{۳۶+۱۶}=\sqrt{۵۲}$$

$$\text{مساحت دایره}=\pi R^۲=۵۲\pi$$

**تیز باش!**

نقطه $(۳,-۲)$ روی $۲x+۳y=۰$ قرار دارد، پس به جای محاسبه نقطه تقاطع می‌توان فاصله این نقطه تا قطر دیگر را حساب کرد:

$$\frac{|-۳(۳)+۲(-۲)-۱۳|}{\sqrt{۱۳}}=۲\sqrt{۱۳}=R$$

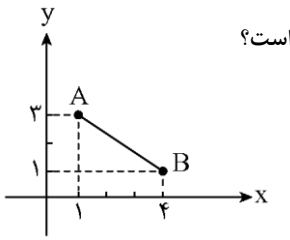
**تالیفی**

فاصله مبدأ مختصات از نقطه تلاقی دو خط به معادلات $۳y=۲x+۱۱$ و $۲y+x=۵$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۸}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۱۰}$

## گروه آموزشی ماز

۱۶- **AB یکی از اضلاع مربع ABCD است. اگر رأس C در ناحیهٔ چهارم واقع باشد، مجموع مختصات رأس D کدام است؟**

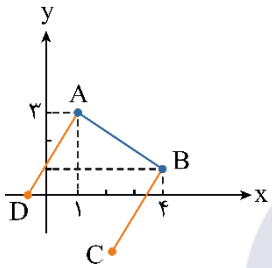



۱) صفر
۲) ۱
۳) -۱
۴) -۲

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

برای رسیدن از A به B باید دو واحد به سمت پایین و ۳ واحد به سمت راست حرکت کرد.

AD با AB برابر و بر آن عمود است، بنابراین:




برای رسیدن از A به D باید ۳ واحد به سمت پایین و ۲ واحد به سمت چپ حرکت کرد. در نتیجه:

$$\left.\begin{matrix}x_D=x_A-۲=-۱\\ y_D=y_A-۳=۰\end{matrix}\right\}\Rightarrow x_D+y_D=-۱$$

## گروه آموزشی ماز

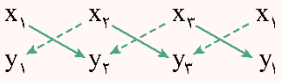
۱۷- **اگر $A(-۲,a)$ و $B(۰,۱)$ و $C(۲,۰)$ رئوس مثلث ABC به مساحت ۶ باشند، a کدام می‌تواند باشد؟**

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۵ ۴) -۱

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

**فرمول بند کفشی**

مساحت مثلثی که سه رأس آن $A(x_۱,y_۱)$، $B(x_۲,y_۲)$ و $C(x_۳,y_۳)$ باشد از رابطه زیر به دست می‌آید:




$$S=\frac{۱}{۲}\left|(x_۱y_۲+x_۲y_۳+x_۳y_۱)-(x_۱y_۳+x_۳y_۲+x_۲y_۱)\right|$$

**روش اول:**

ابتدا طول ضلع BC را به دست می‌آوریم.

$$BC=\sqrt{۲^۲+۱^۲}=\sqrt{۵}$$

معادلهٔ ضلع BC را می‌نویسیم:

$$BC:\ y-۱=\frac{۰-۱}{۲-۰}(x-۰)\Rightarrow y-۱=-\frac{x}{۲}\Rightarrow x+۲y-۲=۰$$

اندازهٔ ارتفاع AH را محاسبه می‌کنیم:

$$AH=\frac{|-۲+۲a-۲|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{|۲a-۴|}{\sqrt{۵}}$$

خواهیم داشت:

$$S_{ABC}=۶\Rightarrow\frac{AH\times BC}{۲}=۶\Rightarrow AH\times BC=۱۲$$

$$\frac{|۲a-۴|}{\sqrt{۵}}\times\sqrt{۵}=۱۲\Rightarrow|a-۲|=۶\Rightarrow\begin{cases}a=۸\\a=-۴\end{cases}$$

**روش دوم:**

$$\begin{matrix}۰&&۲&&-۲&&۰\\&\searrow\swarrow&&\searrow\swarrow&&\searrow\swarrow&\\۱&&۰&&a&&۱\end{matrix}\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}|(۰+۲a-۲)-(۰+۰+۲)|=۶$$

$$\Rightarrow|۲a-۴|=۱۲\Rightarrow|a-۲|=۶\Rightarrow\begin{cases}a=۸\\a=-۴\end{cases}$$

**تالیفی**

مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(۲,۵)$، $B(۳,۰)$ و $C(۰,۲)$، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

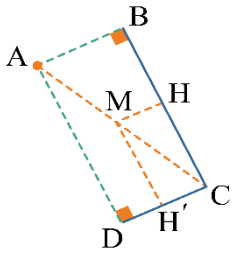
**گروه آموزشی ماز**

۱۸- نقطهٔ $A(۳,-۱)$ یکی از رئوس مستطیلی است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $x-۲y=۱$ و $۲x+y=۲$ می‌باشد. کمترین فاصلهٔ وسط قطر از اضلاع کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ ۲) $\frac{۳}{\sqrt{۵}}$ ۳) $\frac{۴}{\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{۳}{۲\sqrt{۵}}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

با توجه به شکل بدیهی است فاصلهٔ M وسط قطر از دو ضلع مستطیل نصف فاصلهٔ A از این دو ضلع است. کافیست فاصلهٔ A را از این دو خط محاسبه کرده و بر ۲ تقسیم نماییم:




$$\left.\begin{matrix}BC:۲x+y-۲=۰\Rightarrow AB=\frac{|۶-۱-۲|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۳}{\sqrt{۵}}\Rightarrow MH=\frac{۳}{۲\sqrt{۵}}\\CD:x-۲y-۱=۰\Rightarrow AD=\frac{|۳+۲-۱|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}\Rightarrow MH'=\frac{۲}{\sqrt{۵}}\end{matrix}\right\}\Rightarrow MH<MH'$$

$$\frac{۱/۵}{\sqrt{۵}}<\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

**کنکور سراسری ریاضی تیرماه ۱۴۰۲**

نقطه $(۲,۵/۴)$ رأس یک مستطیل است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $۴x+y=۳$ و $x-۴y=۵$ هستند. بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$ ۳) $۲\sqrt{۱۷}$ ۴) $\sqrt{۱۷}$

**گروه آموزشی ماز**

مشابه تمرین کتاب درسی

۱۹- قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,۳)$ نسبت به نقطهٔ $B(۳,۲)$ کدام است؟

۱) $(۱,۱)$ ۲) $(۱,۴)$ ۳) $(۴,۱)$ ۴) $(۴,۴)$

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

اگر $A'(x,y)$ قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,۳)$ نسبت به نقطهٔ $B(۳,۲)$ باشد، B وسط $AA'$ خواهد بود:

$$\begin{cases}\frac{x+۲}{۲}=۳\Rightarrow x=۴\\\frac{y+۳}{۲}=۲\Rightarrow y=۱\end{cases}\Rightarrow A'(۴,۱)$$

مشابه تمرین کتاب درسی

۲۰- خط $۲x-y=۵$ بر دایره‌ای به مرکز $O(a,۲a)$ مماس است. مساحت دایره چقدر است؟

۱) $۵\pi$ ۲) $\frac{\pi}{۵}$ ۳) $۲۵\pi$ ۴) $\frac{\pi}{۲۵}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

فاصلهٔ نقطهٔ $O(a,۲a)$ از خط $۲x-y-۵=۰$ همان شعاع دایره است.

$$R=OH=\frac{|۲a-۲a-۵|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

بنابراین:

$$S=\pi R^{۲}=۵\pi$$

۱- اگر $\frac{a+2b}{a-3b}=m$ باشد، حاصل $\frac{a-3b}{5b}$ برحسب $m$ کدام است؟ $(ab\neq 0)$

۱) $\frac{2}{m+1}$ ۲) $\frac{1}{m+1}$ ۳) $\frac{2}{m-1}$ ۴) $\frac{1}{m-1}$

**پاسخ: گزینهٔ ۴** (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۱۰۲)

$$\frac{a+2b}{a-3b}=m \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{a-3b}{a+2b}=\frac{1}{m} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{a-3b}{(a+2b)-(a-3b)}=\frac{1}{m-1}=\frac{a-3b}{5b}$$

### نسبت

حاصل تقسیم دو کمیت هم‌جنس (هم‌واحد) را **نسبت آن دو کمیت** می‌گوییم. مثل $\frac{x}{y}\ (y\neq 0)$

در هیچ نسبتی مخرج صفر نمی‌شود، همچنین نسبت کمیتی **بدون واحد** است.

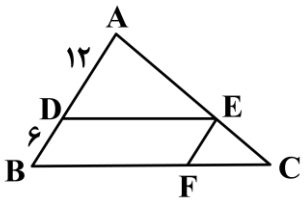
### تناسب

تساوی بین دو نسبت را تناسب می‌گوییم، مانند $\frac{x}{y}=\frac{z}{w}$.

چه کارهایی می‌توانیم در تناسب انجام دهیم؟

$$\frac{x}{y}=\frac{z}{w}\Rightarrow\begin{cases} x\times w=z\times y & \text{طرفین‌وسطین}\\ \frac{x}{z}=\frac{y}{w}\ ,\ \frac{w}{y}=\frac{z}{x} & \text{جابه‌جایی صورت یک کسر با مخرج کسر مقابل}\\ \frac{x+y}{y}=\frac{z+w}{w}\ ,\ \frac{x}{x+y}=\frac{z}{z+w} & \text{ترکیب (جمع) در صورت و مخرج}\\ \frac{|x-y|}{y}=\frac{|z-w|}{w}\ ,\ \frac{x}{|y-x|}=\frac{z}{|w-z|} & \text{تفاضل در صورت و مخرج}\\ \frac{x+y}{|x-y|}=\frac{z+w}{|z-w|}\ ,\ \frac{|x-y|}{x+y}=\frac{|z-w|}{z+w} & \text{ترکیب و تفاضل هم‌زمان}\\ \frac{x}{y}=\frac{z}{w}=\frac{x+z}{y+w}=\frac{ax+bz}{ay+bw}\ (a,b\in\mathbb{R}) & \text{جمع صورت‌ها با هم در صورت و جمع مخرج‌ها با هم در مخرج}\end{cases}$$

۲- در شکل مقابل، چهارضلعی $BDEF$ متوازی‌الاضلاع است. مساحت این چهارضلعی چه کسری از مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ است؟




۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{4}{9}$

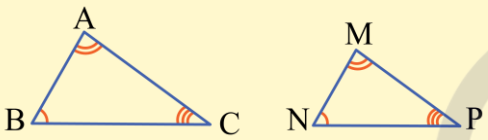
**پاسخ: گزینهٔ ۴** (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۴۶ ـ ۱۱۰۲)

از موازی بودن DE با BC و EF با AB استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle EFC \sim \triangle ABC \Rightarrow \dfrac{S_{\triangle EFC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\dfrac{۶}{۱۸}\right)^۲ = \dfrac{۱}{۹} \Rightarrow S_{\triangle EFC} = \dfrac{۱}{۹} S_{\triangle ABC} \\ \triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\dfrac{۱۲}{۱۸}\right)^۲ = \dfrac{۴}{۹} \Rightarrow S_{\triangle ADE} = \dfrac{۴}{۹} S_{\triangle ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{BDEF} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle EFC} - S_{\triangle ADE} = \dfrac{۴}{۹} S_{\triangle ABC}$$

**تشابه**

مثلث‌های $\triangle ABC$ و $\triangle MNP$ را متشابه می‌گوییم هرگاه **نسبت اضلاع** آن‌ها با هم برابر و **زاویه‌های** آن‌ها نیز **دوبه‌دو** برابر باشند.




$$\triangle ABC \sim \triangle MNP \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP} = \dfrac{BC}{NP} = k \\ \hat{A} = \hat{M}, \hat{B} = \hat{N}, \hat{C} = \hat{P} \end{cases}$$

نسبت اضلاع دو مثلث را **نسبت تشابه** می‌گوییم و آن را با $k$ نشان می‌دهیم.

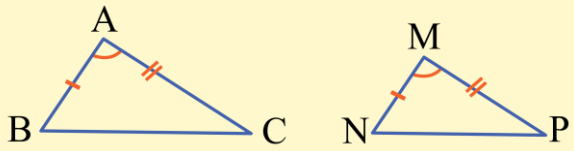
چطور ثابت کنیم دو مثلث متشابه هستند؟

**۱) تناسب ۳ ضلع:** اگر ۳ ضلع از مثلثی ۲ به ۲ با ۳ ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن‌گاه دو مثلث متشابه‌اند.




$$\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP} = \dfrac{BC}{NP} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{M} \\ \hat{B} = \hat{N} \\ \hat{C} = \hat{P} \end{cases}$$

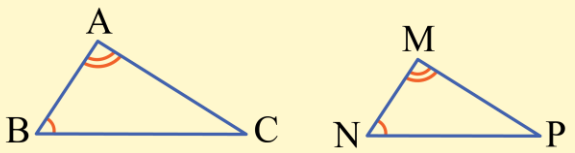
**۲) تناسب ۲ ضلع و تساوی زاویهٔ بین آن دو ضلع:** اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر ۲ به ۲ متناسب بوده و زاویهٔ بین آن دو ضلع در دو مثلث برابر باشد، آن دو مثلث با هم متشابه‌اند.




$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP} \\ \hat{A} = \hat{M} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تناسب دو ضلع و برابری زاویهٔ بین}} \triangle ABC \sim \triangle MNP$$

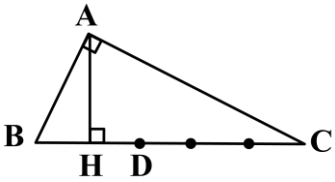
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP} = \dfrac{BC}{NP} \\ \hat{A} = \hat{M}, \hat{B} = \hat{N}, \hat{C} = \hat{P} \end{cases}$$

**۳) تساوی ۲ زاویه:** اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، (زاویه سوم دو مثلث نیز به ناچار برابر می‌شوند) آن‌گاه دو مثلث متشابه‌اند.




$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{M} \\ \hat{B} = \hat{N} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تساوی ۲ زاویه}} \triangle ABC \sim \triangle MNP \Rightarrow \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP} = \dfrac{BC}{NP}$$

۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل مقابل، نقطهٔ D پاره‌خط CH را به نسبت یک به سه تقسیم کرده است. اگر $AB=۱۲$ و $AC=۱۶$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ D از AC چقدر است؟




۱) ۶/۹۶
۲) ۵/۷۶
۳) ۵/۴۸
۴) ۶/۵۴

**پاسخ: گزینهٔ ۲** (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۴۴ ـ ۱۱۰۲)

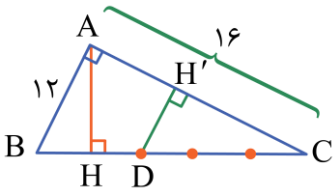
طبق قضیهٔ فیثاغورس طول BC برابر است با:

$$BC=\sqrt{۱۲^۲+۱۶^۲}=۲۰$$

بنابراین:

$$AC^۲=CH\times BC\Rightarrow ۱۶^۲=CH\times ۲۰\Rightarrow CH=\frac{۶۴}{۵}\Rightarrow CD=\frac{۳}{۴}CH=\frac{۴۸}{۵}$$

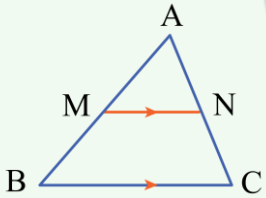
قضیهٔ تالس را در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ می‌نویسیم:




$$DH'\parallel AB\Rightarrow \frac{CD}{BC}=\frac{CH'}{AC}=\frac{DH'}{AB}\Rightarrow \frac{\frac{۴۸}{۵}}{۲۰}=\frac{DH'}{۱۲}\Rightarrow \frac{DH'}{۱۲}=\frac{۴۸}{۱۰۰}\Rightarrow DH'=۱۲\times\frac{۴۸}{۱۰۰}=۵/۷۶$$

### قضیهٔ تالس

مطابق شکل زیر، در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ پاره‌خط MN موازی ضلع BC رسم شده است. بنابراین:




$$MN\parallel BC\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC} & \text{جزء به کل}\\ \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} & \text{جزء به جزء}\end{cases}$$

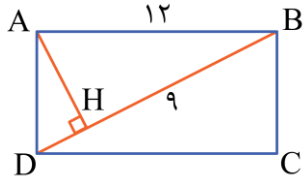
توجه داریم قضیهٔ تالس به صورت **دوشرطی** می‌باشد یعنی هم خود قضیه و هم عکس آن درست می‌باشد.

۴- فرض کنید $AB=۱۲$ طول مستطیل ABCD باشد. از نقطهٔ A عمودی بر قطر BD رسم می‌کنیم و پای این عمود را H می‌نامیم. اگر طول BH برابر ۹ باشد، اندازهٔ عرض مستطیل کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۷}$
۲) $۶\sqrt{۳}$
۳) $۸\sqrt{۳}$
۴) $۳\sqrt{۶}$

**پاسخ: گزینهٔ ۱** (آسان ـ خط به خط ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۴۵ ـ ۱۱۰۲)

شکل سوال را رسم می‌کنیم:

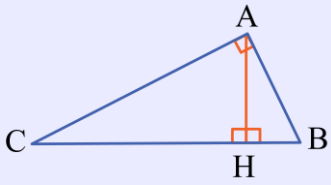



در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{ABD}$ به کمک روابط طولی داریم:

$$AB^۲=BH\times BD\Rightarrow ۱۴۴=۹BD\Rightarrow BD=۱۶$$

$$AD^۲=BD^۲-AB^۲\Rightarrow AD^۲=۱۶^۲-۱۲^۲=۴^۲(۴^۲-۳^۲)\Rightarrow AD^۲=۷\times ۴^۲\Rightarrow AD=۴\sqrt{۷}$$

**روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه**




$AB^2 + AC^2 = BC^2$

$AH \times BC = AB \times AC$

$AH^2 = BH \times HC$

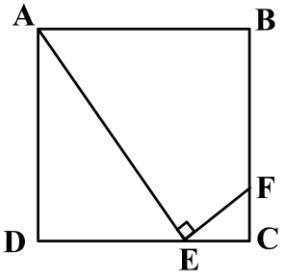
$AB^2 = BH \times BC$

$AC^2 = CH \times BC$

$\frac{AB}{AC} = \sqrt{\frac{BH}{CH}}$

**ماز**

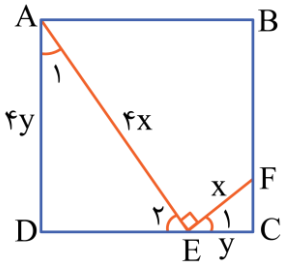
۵- در مربع شکل مقابل، اندازهٔ **AE**، چهار برابر اندازهٔ **EF** است. نسبت ضلع مربع به **EF** کدام است؟




۱) ۳/۸
۲) ۳/۶
۳) ۳/۲
۴) ۳/۴

**پاسخ: گزینهٔ ۳** (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۱۰۲)

به کمک شکل داریم:




$$\left.\begin{matrix}\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 90^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{E}_2 = 90^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E}_1$$

بنابراین مثلث‌های $\overset{\triangle}{ADE}$ و $\overset{\triangle}{EFC}$ به حالت برابری ۲ زاویه، متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر ۴ است. پس:

$$\frac{EC}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} EC = y \\ AD = 4y \end{cases}$$

به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ داریم:

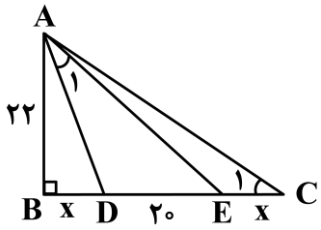
$$(4x)^2 = (4y)^2 + (3y)^2 \Rightarrow 16x^2 = 25y^2 \Rightarrow 4x = 5y \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{4}{5}$$

بنابراین:

$$\frac{AD}{EF} = \frac{4y}{x} = 4 \times \frac{y}{x} = 4 \times \frac{4}{5} = \frac{16}{5} = 3/2$$

**ماز**

۶- در شکل زیر، $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ است. مقدار **x** کدام می‌تواند باشد؟




۱) ۶
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۵

**پاسخ: گزینهٔ ۱** (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۱۰۲)

دو مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ و $\overset{\triangle}{ADC}$ به حالت برابری ۲ زاویه متشابه‌اند. زیرا:

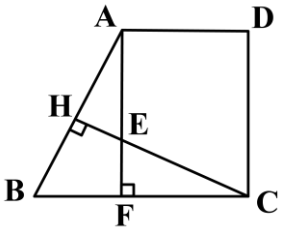
$$\left.\begin{matrix}\hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \text{مشترک } \hat{ADE}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{(zz)} \overset{\triangle}{ADE} \sim \overset{\triangle}{ADC} \Rightarrow \frac{DE}{AD} = \frac{AD}{DC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{20}{AD} = \frac{AD}{20+x} \Rightarrow AD^2 = 400 + 20x$$

از طرفی در مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 \Rightarrow 400 + 20x = x^2 + 22^2 \Rightarrow x^2 - 20x + 84 = 0 \Rightarrow (x-6)(x-14) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \checkmark \\ x = 14 \end{cases}$$ با توجه به گزینه‌ها

**ماز**

**۷- در ذوزنقهٔ شکل مقابل، $BC = 7$، $BF = 3$ و $AE = 4$ است. اندازهٔ AF کدام است؟**




۱) ۵

۲) ۶

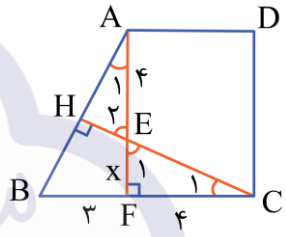
۳) $\frac{20}{3}$

۴) $\frac{17}{3}$

**پاسخ: گزینهٔ ۲** **(متوسط ـ محاسباتی ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۴۵ ـ ۱۱۰۲)**

دو مثلث $\overset{\triangle}{ABF}$ و $\overset{\triangle}{CEF}$ متشابه‌اند. زیرا:

$$\left.\begin{matrix} \hat{E}_1 = \hat{E}_2 \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{F} = \hat{F} = 90^\circ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(zz)} \overset{\triangle}{ABF} \sim \overset{\triangle}{CEF} \Rightarrow \frac{BF}{EF} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{4+x}{4} = \frac{3}{x}$$

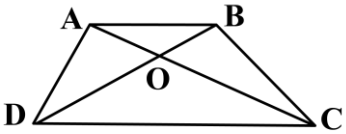



$$\Rightarrow x^2 + 4x = 12 \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \times \\ x = 2 \text{ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین: $AF = AE + EF = 4 + 2 = 6$

**ماز**

**۸- در ذوزنقهٔ شکل مقابل، مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ODC}$، ۹ برابر مساحت مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ است. مساحت مثلث $\overset{\triangle}{OBC}$ چه کسری از مساحت ذوزنقهٔ ABCD است؟**




۱) $\frac{3}{16}$

۲) $\frac{1}{4}$

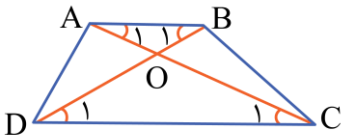
۳) $\frac{1}{6}$

۴) $\frac{2}{15}$

**پاسخ: گزینهٔ ۱** **(متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۴۶ ـ ۱۱۰۲)**

روش اول

$$\left.\begin{matrix} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(zz)} \overset{\triangle}{OAB} \sim \overset{\triangle}{ODC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ODC}}}{S_{\overset{\triangle}{OAB}}} = \left(\frac{DC}{AB}\right)^2 = 9$$




$$\Rightarrow \frac{DC}{AB} = 3 \Rightarrow \frac{DC}{AB} = \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = 3$$

از طرفی دو مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ و $\overset{\triangle}{OBC}$ دارای ارتفاع یکسان هستند، پس نسبت مساحت آن‌ها با نسبت قاعدهٔ آن‌ها برابر است.

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OBC}}}{S_{\overset{\triangle}{OAB}}} = \frac{OC}{OA} = 3$$

برای دو مثلث $\overset{\triangle}{OAD}$ و $\overset{\triangle}{OAB}$ نیز داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OAD}}}{S_{\overset{\triangle}{OAB}}}=\frac{OD}{OB}=۳$$

بنابراین:

$$S_{\overset{\triangle}{OAB}}=S\Rightarrow\begin{cases}S_{\overset{\triangle}{OBC}}=S_{\overset{\triangle}{OAD}}=۳S\\ S_{\overset{\triangle}{ODC}}=۹S\end{cases}\Rightarrow S_{ABCD}=S+۳S+۳S+۹S=۱۶S\Rightarrow\frac{S_{\overset{\triangle}{OBC}}}{S_{ABCD}}=\frac{۳}{۱۶}$$

**روش دوم**

طبق درسنامه داریم:

۱) $S_{\overset{\triangle}{OAD}}=S_{\overset{\triangle}{OBC}}$

۲) $S_{\overset{\triangle}{OAB}}\times S_{\overset{\triangle}{ODC}}=S_{\overset{\triangle}{OAD}}\times S_{\overset{\triangle}{OBC}}$

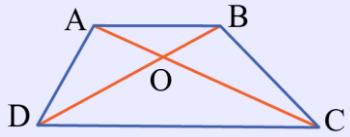
با فرض $S_{\overset{\triangle}{OAB}}=S$ نتیجه می‌شود $S_{\overset{\triangle}{ODC}}=۹S$ و داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{OAB}}\times S_{\overset{\triangle}{ODC}}=S_{\overset{\triangle}{OAD}}\times S_{\overset{\triangle}{OBC}}\Rightarrow S\times ۹S=S^{۲}_{\overset{\triangle}{OBC}}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OBC}}=S_{\overset{\triangle}{OAD}}=۳S$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OBC}}}{S_{ABCD}}=\frac{۳S}{S+۳S+۳S+۹S}=\frac{۳}{۱۶}$$

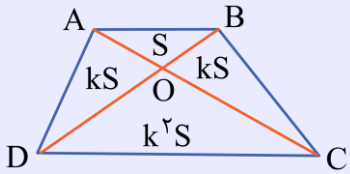
**در ذوزنقه دقت کن که:**




۱) $S_{\overset{\triangle}{OAD}}=S_{\overset{\triangle}{OBC}}$

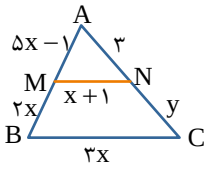
۲) $S_{\overset{\triangle}{OAB}}\times S_{\overset{\triangle}{ODC}}=S_{\overset{\triangle}{OAD}}\times S_{\overset{\triangle}{OBC}}$

اگر مثلث‌های $\overset{\triangle}{OAB}$ و $\overset{\triangle}{ODC}$ با نسبت تشابه $k$، متشابه باشند، آن‌گاه:



مشابه تمرین کتاب درسی

۹- در شکل روبه‌رو، پاره‌خط MN به موازات ضلع BC است. مقدار $x-y$ چه عددی است؟




۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۱

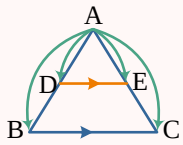
پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

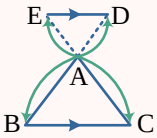
$$\frac{x+۱}{۳x}=\frac{۳}{y+۳}=\frac{۵x-۱}{۷x-۱}\Rightarrow (x+۱)(۷x-۱)=۳x(۵x-۱)\Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{۱}{۸} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=۱\Rightarrow \frac{۳}{y+۳}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow y=۱/۵\Rightarrow x-y=-\frac{۱}{۲}$$

### تعمیم قضیهٔ تالس

هرگاه خطی دو ضلع یک مثلث (یا امتداد آن‌ها) را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم مثلث موازی باشد، در این صورت مثلثی به وجود می‌آید که اندازه ضلع‌های آن با اندازه ضلع‌های مثلث اصلی متناسب است. این قضیه را اصطلاحاً تالس جزء به کل می‌نامیم. به عبارت دیگر، اگر در شکل‌های زیر DE با BC موازی باشد، داریم:

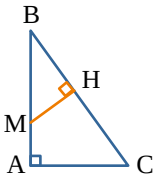



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

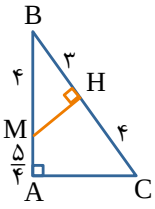
گروه آموزشی ماز

۱۰- در شکل مقابل، $BM=HC$ و $AM=\frac{۵}{۴}$ و $BH=۳$، اندازه MH کدام است؟




۱) ۵
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۷}$
۴) $۲\sqrt{۷}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)




$$MBH \sim ABC \Rightarrow \frac{BM}{BC}=\frac{BH}{AB}$$

$$BM=HC=x \Rightarrow \frac{x}{x+۳}=\frac{۳}{x+\frac{۵}{۴}}$$

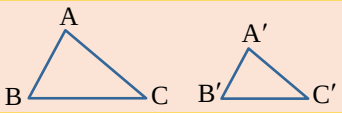
$$\Rightarrow x^۲+\frac{۵}{۴}x=۳x+۹\Rightarrow x^۲-\frac{۷}{۴}x=۹\Rightarrow (x-\frac{۷}{۸})^۲=۹+\frac{۴۹}{۶۴}\Rightarrow x-\frac{۷}{۸}=\frac{۲۵}{۸}\Rightarrow x=۴$$

$$MH=\sqrt{۱۶-۹}=\sqrt{۷}$$

### تشابه مثلث‌ها

دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را متشابه گوییم اگر و فقط اگر زاویه‌های متناظر در هر دو مثلث با هم برابر بوده و نسبت اضلاع متناظر نیز در هر دو مثلث یکسان باشد.

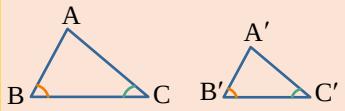
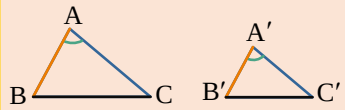
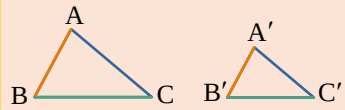
در این صورت می‌گوییم که دو مثلث ABC و $A'B'C'$ با هم متشابهند و آن را به صورت $\overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{A'B'C'}$ نشان می‌دهیم.




| | |
|---|---|
| زاویه‌های متناظر در هر مثلث با هم برابر باشند. | $\hat{A}=\hat{A}', \hat{B}=\hat{B}', \hat{C}=\hat{C}'$ |
| نسبت اضلاع متناظر در هر دو مثلث، یکسان باشد. | $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=k$ |

### حالت‌های تشابه دو مثلث

با استفاده از قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها می‌توان سه قضیه بعد را انتیجه گرفت که این قضایا حالت‌های تشابه دو مثلث را بیان می‌کنند:

| | | |
|---|---|---|
| هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث به حالت دو زاویه برابر (زز)، متشابه‌اند. | $\begin{cases}\hat{B}=\hat{B}'\\ \hat{C}=\hat{C}'\end{cases}\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ |  |
| هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب بوده و زاویه بین آن‌ها با هم برابر باشد، آن دو مثلث به حالت دو ضلع متناسب و زاویه بین برابر (ض‌زض) متشابه‌اند. | $\begin{cases}\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}\\ \hat{A}=\hat{A}'\end{cases}\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ |  |
| هرگاه اندازه سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث به حالت سه ضلع متناسب (ض‌ض‌ض) متشابه‌اند. | $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ |  |

**نکته:**

اگر دو مثلث به حالت دو زاویه برابر با هم متشابه باشند، برای نوشتن نسبت اضلاع متناظر، به روش زیر عمل می‌کنیم:

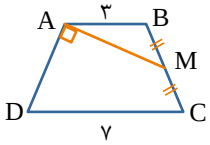
- ابتدا سعی می‌کنیم که دو مثلثی را که با هم متشابه هستند را به صورت جدا از هم تصویر کنیم.
- سپس در دو مثلث متشابه، زاویه‌های برابر را پیدا کرده و آن‌ها را به ترتیب و متناظر با هم، در زیر یکدیگر می‌نویسیم.
- در نهایت، اضلاع روبه‌رو به زاویه‌های برابر را شناسایی کرده و در تناسب قرار می‌دهیم.

**توجه:**

توجه داشته باشید که در نوشتن تناسب، در صورت هر سه کسر، اضلاع مربوط به یک مثلث و در مخرج کسر نیز اضلاع مربوط به مثلث دیگر را می‌نویسیم.

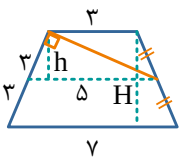
## گروه آموزشی ماز

**۱۱- در ذوزنقه مقابل M وسط ضلع BC است به طوری که AM = ۴، مساحت ذوزنقه چه عددی است؟**




۱) ۲۴
۲) ۲۰
۳) ۱۸
۴) ۲۵

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

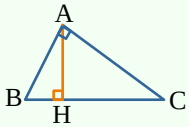



$$۵h=۱۲\Rightarrow h=\frac{۱۲}{۵}$$

$$H=\frac{۲۴}{۵}\Rightarrow S=\frac{۳+۷}{۲}\times\frac{۲۴}{۵}=۲۴$$

**نکته:**

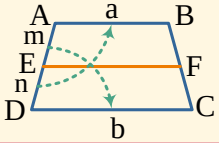
اگر مساحت مثلث قائم‌الزاویه ABC را به دو روش محاسبه کرده و آن‌ها را با هم برابر قرار دهیم، یکی دیگر از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه به صورت زیر به دست می‌آید:




$$\begin{cases}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times BC\times AH\\ S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times AB\times AC\end{cases}\Rightarrow BC\times AH=AB\times AC$$

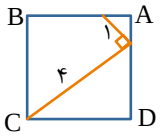
**توجه:**

اگر در سوالی، اندازهٔ پاره‌خط EF مدنظر باشد، می‌توان با استفاده از رابطهٔ زیر مستقیماً طول EF را محاسبه کرد، به طوری که اگر $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}=\frac{m}{n}$ باشد، داریم:



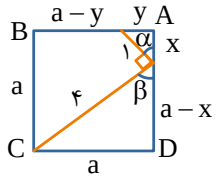

$$EF=\frac{mb+na}{m+n}$$

۱۲- در شکل مقابل، مساحت مربع چه عددی است؟




۱) ۱۰/۲۴
۲) ۱۲/۲۱
۳) ۸/۴۱
۴) ۹/۹۶

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)




$$\alpha+\beta=۹۰^\circ \Rightarrow \frac{a-x}{۴}=\frac{y}{۱} \Rightarrow y=\frac{۱}{۴}(a-x)$$

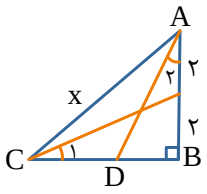
$$\begin{cases} x^۲+y^۲=۱ \Rightarrow ۱۶x^۲+(a-x)^۲=۱۶ \\ (a-x)^۲+a^۲=۱۶ \end{cases} \Rightarrow ۱۶x^۲=a^۲ \Rightarrow a=۴x$$

$$۹x^۲+۱۶x^۲=۱۶ \Rightarrow x^۲=\frac{۱۶}{۲۵}$$

$$\Rightarrow S=a^۲=۱۶x^۲=\frac{۲^۸}{۲۵}=\frac{۲^{۱۰}}{۱۰۰}=۱۰/۲۴$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- در شکل روبه‌رو $\hat{A}_۲=\hat{C}_۱$ و $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$، مقدار x کدام است؟

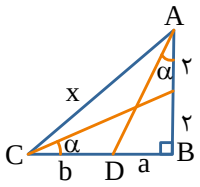



۱) $۴\sqrt{۳}$
۲) $۶\sqrt{۲}$
۳) ۸
۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

$$\tan\alpha=\frac{a}{۴}=\frac{۲}{a+b} \Rightarrow a(a+b)=۸$$

از طرفی:




$$\frac{a}{b}=\frac{۴}{x} \Rightarrow b=\frac{ax}{۴}$$

$$a(a+\frac{ax}{۴})=۸ \Rightarrow a^۲(x+۴)=۳۲ \Rightarrow \begin{cases} a^۲(x+۴)=۳۲ \ (*) \\ x^۲=(a+b)^۲+۱۶ \Rightarrow \text{ABC قائم‌الزاویه} \end{cases}$$

$$x^۲=۱۶+(\frac{a}{۴}(x+۴))^۲=۱۶+\frac{a^۲}{۱۶}(x+۴)^۲$$

$$\xrightarrow{(*)} =۱۶+۲(x+۴) \Rightarrow x^۲=۱۶+۲x+۸ \Rightarrow x^۲-۲x-۲۴=۰ \Rightarrow x=۶$$

**1. اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $\frac{(۲m+۳)x-۱}{x^۳-x}=\frac{(۲m-۱)x^۲}{x^۲-۱}+\frac{m}{x^۲+x}$ برابر ۲ باشد، آنگاه معادله چند جواب دیگر دارد؟**

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ: گزینه ۱**

$x=۲$ یکی از ریشه‌های معادله می‌باشد، پس در آن صدق می‌کند:

$$\frac{m}{x^۲+x}+\frac{(۲m-۱)x^۲}{x^۲-۱}=\frac{(۲m+۳)x-۱}{x^۳-x}\xrightarrow{x=۲}$$
$$\frac{m}{۶}+\frac{۸m-۴}{۳}=\frac{۴m+۵}{۶}\xrightarrow{\times ۶}$$
$$m+۲(۸m-۴)=۴m+۵\Rightarrow ۱۷m-۸=۴m+۵\Rightarrow m=۱$$

حالا با جایگذاری $m=۱$ در معادله داده شده، ریشه‌های دیگر معادله را می‌یابیم:

$$\frac{۱}{x^۲+x}+\frac{x^۲}{x^۲-۱}=\frac{۵x-۱}{x^۳-x}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{x(x+۱)}+\frac{x^۲}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۵x-۱}{x(x-۱)(x+۱)}$$

حالا طرفین معادله را در $x(x-۱)(x+۱)$ ضرب می‌کنیم:

$$x-۱+x^۳=۵x-۱\Rightarrow x^۳-۴x=۰$$
$$\Rightarrow x(x-۲)(x+۲)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=-۲\checkmark \\ x=۰\times \text{(ریشهٔ مخرج) غ ق ق} \\ x=۲\checkmark \end{cases}$$

پس معادله یک ریشه دیگر دارد.

## معادلات گویا (کسری)

در حالت کلی، هر معادله به فرم $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}+\cdots+\frac{E}{F}$ که در آن صورت و مخرج کسرها همگی چند جمله‌ای باشند را یک معادله گویا (کسری) می‌نامیم.

### روش حل معادله

برای حل معادله گویا، پس از ضرب طرفین تساوی در ک.م.م مخرج کسرها ( مخرج مشترک)، عبارت به دست آمده را ساده و حل می‌کنیم.

در آخر باید توجه داشته باشیم که جواب‌های به دست آمده، نباید مخرج کسرها را صفر کنند.

$$\frac{۱}{x}+\frac{۲}{x-۱}=-۲ \xrightarrow{\times(x)(x-۱)} (x-۱)+۲(x)=-۲(x)(x-۱) \Rightarrow ۲x^۲+x-۱=۰ \Rightarrow x=-۱\ ,\ x=\frac{۱}{۲}$$

**نحوه محاسبه ک.م.م مخرج‌ها**

ابتدا مخرج‌ها را تا جای امکان ساده می‌کنیم. در نهایت با ضرب عبارت‌های به دست آمده در هم، ک.م.م مخرج‌ها را به دست می‌آوریم.

دقت کنید اگر بعد از تجزیه مخرج کسرها، به عامل تکراری برخورد کردیم، بزرگترین توان آن عامل را در ک.م.م می‌نویسیم.

$$\frac{۱}{x^۲+۲x+۱}+\frac{۲x}{x^۲-۱}=\frac{x^۲+۱}{x^۲-x} \xrightarrow{\text{تجزیه مخرج‌ها}} \frac{۱}{(x+۱)^۲}+\frac{۲x}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{x^۲+۱}{x(x-۱)}$$

بنابراین ک.م.م مخرج کسرها برابر $(x)(x+۱)^۲(x-۱)$ است.

### نکات

در حالت خاص، برای حل معادله $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ می‌توانیم طرفین و وسطین انجام دهیم.

$$\frac{x+۲}{۳x-۱}=\frac{x}{۱-x} \Rightarrow (۱-x)(x+۲)=(x)(۳x-۱)$$

اگر در معادله گویا، صورت دو طرف معادله کسری را ساده کنیم، حتما باید ریشه آن عبارت ساده شده را در نظر بگیریم. اما ساده کردن مخرج در دو طرف تساوی یا صورت و مخرج در یک طرف تساوی، نیازی به در نظر گرفتن ریشه آن ندارد.

$$\frac{(x-۱)(x^۲+۲x)}{x+۳}=\frac{x^۲+۳x+۲}{x^۲+x} \Rightarrow \frac{(x)(x-۱)(x+۲)}{x+۳}=\frac{(x+۲)(x+۱)}{(x)(x+۱)} \Rightarrow \frac{(x)(x-۱)}{x+۳}=\frac{۱}{x}$$

ریشه عبارت $(x+۲)$ یعنی $x=-۲$ را به عنوان یکی از ریشه ها در نظر می‌گیریم.

جمع یک عبارت با معکوس خود، همواره از ۲ بزرگتر یا از $-۲$ کوچکتر است؛ داریم:

$$a>۰: a+\frac{۱}{a}\geq ۲ \quad , \quad a<۰: a+\frac{۱}{a}\leq -۲$$

بنابراین معادلات به صورت $a+\frac{۱}{a}=b$ که $-۲<b<۲$ باشد، فاقد جواب حقیقی هستند.

$\frac{x^۲+۲x-۳}{x-۴}+\frac{x-۴}{x^۲+۲x-۳}=۱ \Rightarrow$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

**کاربرد معادله گویا**

در برخی تست‌ها، با خواندن صورت تست باید معادله گویا را خودمان بسازیم (سوالاتِ معروف نقاش، غلظت رنگ، حرکت پرنده، قایق و قطار و تخفیفِ خرید و ....) در این سوالات از روابط زیر کمک می‌گیریم.

| مسائل توان: | مسائل سرعت: | مسائل غلظت: |
|---|---|---|
| توان $=p$ ، زمان $=t$ ، $p=\frac{1}{t}$ | مسافت $=x$ ، سرعت $=v$ ، زمان $=t$ ، $t=\frac{x}{v}$ | غلظت محلول $=\frac{\text{حل شونده}}{\text{کل محلول}}$ |
| اگر علی کاری را به تنهایی در ۲ روز و سارا کاری را در ۵ روز انجام دهد، اگر با هم کار کنند، $t_{\text{کل}}$ است. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1}{t}$ | قطاری مسیر ۵۱ کیلومتری را با سرعت ۱۷ کیلومتر بر ساعت در زمان $t=\frac{51}{17}=3h$ می‌پیماید. | اگر ۸ گرم نمک به ۱۰۰ گرم آب اضافه کنیم، غلظت محلول آب نمک برابر $\frac{8}{108}\simeq 0/74$ است. |

در مستطیلی به طول $x$ و عرض $y$ اگر نسبت طول به عرض آن $\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ باشد، به آن مستطیل طلایی می‌گوییم.

در مستطیل طلایی، همواره رابطه $\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}$ برقرار است.

اگر طول یک مستطیل طلایی برابر ۲ باشد، عرض آن برابر است با:

$$\frac{2}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\frac{4}{1+\sqrt{5}}$$

**2. معادلهٔ $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x+2}{x}=\frac{3}{x-2}+5$ چند جواب صحیح دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

**پاسخ: گزینه ۴**

برای راحت‌تر حل شدن معادلهٔ داده شده طرفین معادله را در $x(x-2)$ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین بروند:

$$\frac{x+1}{x-2}+\frac{x+2}{x}=\frac{3}{x-2}+5 \xrightarrow{\times x(x-2)}$$

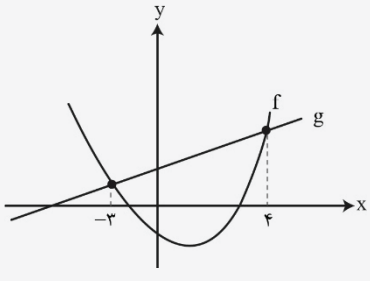
$$x(x+1)+(x-2)(x+2)=3x+5x(x-2)$$

$$2x^2+x-4=5x^2-7x \Rightarrow 3x^2-8x+4=0$$

$$\Rightarrow (x-2)(3x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \times \\ x=\frac{2}{3} \checkmark \end{cases}$$

درضمن چون $x=2$ ریشهٔ مخرج معادله می‌باشد، پس قابل قبول نمی‌باشد. از طرفی $x=\frac{2}{3}$ صحیح نمی‌باشد، پس معادله فاقد جواب صحیح است.

**3. باتوجه به نمودار توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در شکل مقابل، مجموعه جواب نامعادلهٔ $xf(x)-2f(x)\le xg(x)-2g(x)$ کدام است؟**




۱) $[-3,4]$

۲) $[-3,2]\cup[4,+\infty)$

۳) $(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$

۴) $(-\infty-3]\cup[2,4]$

**پاسخ: گزینه ۴**

ابتدا به کمک فاکتورگیری نامعادلهٔ داده شده را مرتب می‌کنیم:

$$xf(x)-2f(x)\le xg(x)-2g(x)\Rightarrow f(x)(x-2)\le g(x)(x-2)$$
$$\Rightarrow f(x)(x-2)-g(x)(x-2)\le 0\Rightarrow (x-2)\big(f(x)-g(x)\big)\le 0$$

حالا با توجه به نمودار داده شده جدول تعیین علامت را تشکیل می‌دهیم:

| $x$ | | $-3$ | | $2$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-g(x)$ | $+$ | ○ | $-$ | ○ | $-$ | ○ | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | ○ | $-$ | ○ | $+$ | ○ | $+$ |
| $p(x)$ | $-$ | ‖ | $+$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ |

مجموعه جواب نامعادله برابر بازهٔ $(-\infty,-3]\cup[2,4]$ است.

**4. اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{(x-1)^2}{x}+x\ge 1$ برابر با بازهٔ $(a,b]\cup[c,+\infty)$ باشد، مقدار $a-b+c$ کدام است؟**

۱) $-1$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $1$

**پاسخ: گزینه ۳**

نامعادلهٔ داده شده را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم و سپس به کمک جدول تعیین علامت مجموعه جواب آن را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{(x-1)^2}{x}+x\ge 1\Rightarrow \frac{x^2-2x+1}{x}+x-1\ge 0$$
$$\Rightarrow \frac{\big(x^2-2x+1\big)+x(x-1)}{x}\ge 0\Rightarrow \frac{2x^2-3x+1}{x}\ge 0$$
$$\Rightarrow \frac{(x-1)(2x-1)}{x}\ge 0\Rightarrow$$

| $x$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | $-$ | ‖ | $+$ | ○ | $-$ | ○ | $+$ |

پس مجموعه جواب نامعادله برابر بازهٔ $(0,\frac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$ است. پس درنتیجه: $a-b+c=0-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

**5. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $-\frac{1}{6}<\frac{1}{x-1}<-2$ شامل چند عدد صحیح است؟**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

**پاسخ: گزینه ۳**

برای حل نامعادلهٔ توام داده شده، هریک از نامعادله‌ها را جداگانه حل می‌کنیم و بین جواب آنها اشتراک می‌گیریم:

$$1)\ \frac{1}{x-1}>-2\Rightarrow \frac{1}{x-1}+2>0\Rightarrow \frac{2x-1}{x-1}>0\Rightarrow$$

| $x$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{2x-1}{x-1}$ | $+$ | ○ | $-$ | ‖ | $+$ |

$$\Rightarrow x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$$

$$2)\ \frac{1}{x-1}<-\frac{1}{6}\Rightarrow \frac{1}{x-1}+\frac{1}{6}<0\Rightarrow \frac{x+5}{6(x-1)}<0\Rightarrow$$

| $x$ | | $-5$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x+5}{6(x-1)}$ | $+$ | ○ | $-$ | ‖ | $+$ |

$$\Rightarrow x\in(-5,1)$$

از اشتراک بازه‌های به‌دست آمده مجموعه جواب نامعادله برابر بازهٔ $\left(-5,\frac{1}{2}\right)$ است که شامل ۵ عدد صحیح است.

**نامعادله**

برای حل نامعـادلات، ابتدا تمامی عبارت‌ها را به یک سمت منتقل می‌کنیم تا به $p>0$ یا $p<0$ برسیم؛ سپس $p$ را تعیین علامت می‌کنیم.

برای حل نامعادله $2x^2+2x-1>1-x$، ابتدا همه عبارت‌ها را به یک سمت منتقل تا به نامعادله $2x^2+3x-2>0$ برسیم و سپس عبارت $p=2x^2+3x-2$ را تعیین علامت می‌کنیم.

**6. حاصلضرب جواب‌های معادلهٔ $\frac{1}{3+\sqrt{x+9}}+\frac{1}{3-\sqrt{x+9}}=-\frac{x}{6}$ کدام است؟**

۱) ۱۲ ۲) -۱۸ ۳) -۳۶ ۴) ۶

**پاسخ: گزینه ۳**

ابتدا سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{3+\sqrt{x+9}}+\frac{1}{3-\sqrt{x+9}}=\frac{\left(3+\sqrt{x+9}\right)+\left(3-\sqrt{x+9}\right)}{\left(3+\sqrt{x+9}\right)\left(3-\sqrt{x+9}\right)}$$

$$=\frac{6}{(3)^2-\left(\sqrt{x+9}\right)^2}=\frac{6}{9-(x+9)}=-\frac{6}{x}$$

حالا به حل معادله داده شده می‌پردازیم:

$$\frac{1}{3+\sqrt{x+9}}+\frac{1}{3-\sqrt{x+9}}=-\frac{x}{6}\Rightarrow -\frac{6}{x}=-\frac{x}{6}\Rightarrow x^2=36\Rightarrow x=\pm 6\rightarrow \text{حاصلضرب}=-36$$

**7. مجموع جواب‌های حقیقی معادلهٔ $\sqrt{x^2+x+1}=1-x-x^2$ کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

**پاسخ: گزینه ۳**

ابتدا معادله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x^2+x+\sqrt{x^2+x+1}=1\xrightarrow{+1}x^2+x+1+\sqrt{x^2+x+1}=2$$

حالا با تغییر متغیر $\sqrt{x^2+x+1}=t$ داریم:

$$t^2+t-2=0\Rightarrow (t-1)(t+2)=0\Rightarrow \begin{cases} t=1\\ t=-2\end{cases}$$

$t=-2\Rightarrow \sqrt{x^2+x+1}=-2\Rightarrow$ فاقد ریشه حقیقی

$t=1\Rightarrow \sqrt{x^2+x+1}=1\Rightarrow x^2+x=0\Rightarrow x=0, x=-1$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر است با : $-1+0=-1$

**معادلات گنگ (رادیکالی)**

اگر در یک معادله، مجهول زیر رادیکال باشد، به آن معادله گنگ (رادیکالی) می‌گوییم.

معادله $\sqrt{1-2x}=x+1$ یک معادله رادیکالی (گنگ) است.

**روش حل معادله**

برای حل معادلات گنگ، رادیکال را در یک سمت تساوی صورت تنها می‌کنیم و با توان‌رسانی طرفین معادله، رادیکال را از بین می‌بریم؛ سپس با ساده سازی معادله به جواب می‌رسیم.

در آخر باید توجه داشته باشیم که جواب‌های به دست آمده، باید در معادله صدق کنند. (اگر می‌خواهی روش کلی یادت بمونه، میشه تنها؛ یعنی تنها، توان، آزمایش)

$$\sqrt{x}+x=6\Rightarrow \sqrt{x}=6-x\Rightarrow (\sqrt{x})^2=(6-x)^2\Rightarrow x=x^2-12x+36\Rightarrow x^2-13x+36=0\Rightarrow \begin{cases} x=4 \text{ ق ق}\\ x=9 \text{ غ ق ق}\end{cases}$$

| | | |
|---|---|---|
| معادلات گنگ (رادیکالی) | نکات | از تساوی $\sqrt[2n]{A}=B$ نتیجه می‌گیریم $A\geq 0$ و $B\geq 0$ است. |
| | | معادله $\sqrt{x-3}=1-x$ جواب ندارد، چرا که مجموعه جواب نامعادلات $x-3\geq 0$ و $1-x\geq 0$ با هم اشتراک ندارند. |
| | | در معادله خاص $(\sqrt[2n]{A}+\sqrt[2m]{B}+\cdots=0)$ که جمع چند رادیکال فرجه زوج برابر صفر است، ریشه معادله، همان ریشه مشترک عبارات زیر رادیکال یعنی $A=B=\cdots=C=0$ است؛ در واقع جواب، عددی است که تمام رادیکال ها را صفر کند. |
| | | $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-1}+\sqrt[4]{x-1}=0 \Rightarrow x=1$ |
| | | در معادلات گنگ با ظاهر پیچیده، حواستان به حوزه تعریف رادیکال‌ها باشد. معمولا بازه جواب محدود به صفر یا یک عدد می‌شود که با جایگذاری آن اعداد تکلیف حل معادله مشخص می‌شود. |
| | | در معادله $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x+\sqrt{x-2}}-\sqrt{2-x}$ اشتراک حوزه تعریف رادیکال ها، تنها $x=2$ است؛ چون این عدد در معادله صادق نیست، پس معادله فاقد ریشه حقیقی است. |
| | کاربرد معادله گنگ | با توجه به رابطه فاصله دو نقطه $(AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2})$ از حل معادله گنگ در مسائلی که بحث فاصله دو نقطه باشد، استفاده می‌کنیم. |
| | | فاصله نقطه $A(x,3)$ از مبدا مختصات برابر ۵ است، مختصات نقطه $A$ به کمک معادله گنگ زیر به دست می‌آید. $\sqrt{x^2+3^2}=5 \Rightarrow x^2+9=25 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$ |

**8. مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{1}{|x+1|}>\frac{1}{2}$ شامل چند عدد صحیح است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۲**

چون $|x+1|\geq 0$ است، می‌توانیم در نامعادلهٔ داده شده طرفین وسطین کنیم، درضمن جهت نامساوی تغییر نمی‌کند:

$$\frac{1}{|x+1|}>\frac{1}{2} \xrightarrow[x\neq -1]{\times|x+1|} |x+1|<2 \Rightarrow -2<x+1<2$$

$$\Rightarrow -3<x<1$$

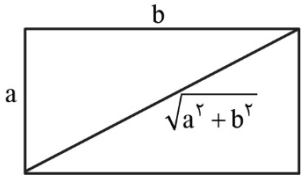
بنابراین مجموعه جواب نامعادله به‌صورت $(-3,-1)\cup(-1,1)$ که شامل ۲ عدد صحیح است.

**9. از تقسیم اندازهٔ قطر یک مستطیل به عرض آن، عدد طلایی حاصل می‌شود. نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟**

۱) $\frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}$ ۳) $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$ ۴) $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$

**پاسخ: گزینه ۱**

مستطیل مقابل را در نظر بگیرید:




$$\frac{\text{قطر}}{\text{عرض}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} \Rightarrow 1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

بنابراین نسبت طول به عرض مستطیل برابر است با:

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}\times\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$$

در مستطیلی به طول $x$ و عرض $y$ اگر نسبت طول به عرض آن $\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ باشد، به آن مستطیل طلایی می‌گوییم.

در مستطیل طلایی، همواره رابطه $\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}$ برقرار است.

اگر طول یک مستطیل طلایی برابر ۲ باشد، عرض آن برابر است با:

$$\frac{2}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=\frac{4}{1+\sqrt{5}}$$

**10. دو فرد A و B در یک شرکت همکار هستند و در هر ۶ ساعت یک دستگاه کامل تولید می‌کنند. اگر سرعت کار فرد B، ۳برابر فرد A باشد، فرد B بعد از چند ساعت به تنهایی یک دستگاه را تولید می‌کند؟**

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

**پاسخ: گزینه ۱**

دو فرد A و B هر ۶ ساعت یک دستگاه تولید می‌کنند پس در هر ساعت $\frac{1}{6}$ دستگاه را تولید می‌کنند. سرعت فرد B، ۳ برابر فرد A است پس مدت زمان تولید دستگاه توسط فرد B، $\frac{1}{3}$ برابر فرد A است.

$$\text{سرعت B}=3\times\text{سرعت A}\rightarrow t_B=\frac{t_A}{3}\rightarrow t_A=3t_B$$

بنابراین اگر فرد A و B به‌ترتیب در $t_A$ و $t_B$ ساعت یک دستگاه تولید کنند، پس در هر ساعت به ترتیب $\frac{1}{t_A}$ و $\frac{1}{t_B}$ از دستگاه را تولید می‌کنند.

از طرفی دو فرد A و B هر ۶ ساعت یک دستگاه را تولید می‌کنند پس در هر ساعت $\frac{1}{6}$ دستگاه را تولید می‌کنند. لذا داریم:

$$\frac{1}{t_A}+\frac{1}{t_B}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{1}{3t_B}+\frac{1}{t_B}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow\frac{4}{3t_B}=\frac{1}{6}\Rightarrow 24=3t_B\Rightarrow t_B=8\Rightarrow t_A=24$$

پس فرد B به تنهایی در ۸ ساعت یک دستگاه را تولید می‌کند.

**سوالات کاربردی معادلات گویا**

در برخی تست‌ها، با خواندن صورت تست باید معادله گویا را خودمان بسازیم (سوالاتِ معروف نقاش، غلظت رنگ، حرکت پرنده، قایق و قطار و تخفیفِ خرید و ....) در این سوالات از روابط زیر کمک می‌گیریم.

| ۱-مسائل توان: | ۲-مسائل سرعت: | ۳-مسائل غلظت: |
|---|---|---|
| $p=\frac{1}{t}$ ، $t=$زمان ، $p=$توان | $t=\frac{x}{v}$ ، $x=$مسافت ، $v=$سرعت ، $t=$زمان | $\text{غلظت محلول}=\frac{\text{حل شونده}}{\text{کل محلول}}$ |
| اگر علی کاری را به تنهایی در ۲ روز و سارا کاری را در ۵ روز انجام دهد، اگر با هم کار کنند، $\frac{1}{t_{کل}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ است. | قطاری مسیر ۵۱ کیلومتری را با سرعت ۱۷ کیلومتر بر ساعت در زمان $t=\frac{51}{17}=3h$ می‌پیماید. | اگر ۸ گرم نمک به ۱۰۰ گرم آب اضافه کنیم، غلظت محلول آب نمک برابر $\frac{8}{108}\simeq 0/74$ است. |

**1.** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله $x^۲-۴x-۱=۰$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{\beta+۲}+\frac{\beta}{\alpha+۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۶}{۱۱}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۱۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۱۱}$

**پاسخ: گزینه ۱**

ابتدا حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۴x-۱=۰$ را می‌یابیم:

$$x^۲-۴x-۱=۰ \xrightarrow{\Delta>۰} \begin{cases} \alpha\beta=P=\frac{c}{a}=-۱ \\ \alpha+\beta=S=\frac{-b}{a}=۴ \end{cases}$$

حال برای محاسبه‌ی $\frac{\alpha}{\beta+۲}+\frac{\beta}{\alpha+۲}$ مخرج مشترک گرفته و ساده می‌کنیم:

$$\frac{\alpha}{\beta+۲}+\frac{\beta}{\alpha+۲}=\frac{\alpha(\alpha+۲)+\beta(\beta+۲)}{(\beta+۲)(\alpha+۲)}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲+۲(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+۲(\alpha+\beta)+۴}=\frac{S^۲-۲P+۲S}{P+۲S+۴}=\frac{(۴)^۲-۲(-۱)+۲(۴)}{(-۱)+۲(۴)+۴}=\frac{۱۶+۲+۸}{-۱+۸+۴}=\frac{۲۶}{۱۱}$$

**روابط بین ریشه‌ها**

در معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $\Delta\geq۰$ باشد، $\alpha$ و $\beta$ دو ریشه این معادله اند.

میتوانیم بدون محاسبه ریشه‌های معادله، به سوالاتی راجع به جمع یا ضرب آنها پاسخ داد.

مثال‌ها برای معادله $۳x^۲+۶x-۲=۰$ نوشته شده اند.

| | | |
|---|---|---|
| ۱) $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ | ۲) $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$ | ۳) $\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P$ |
| $s=\alpha+\beta=\frac{-۶}{۳}=-۲$ | $p=\alpha\beta=\frac{-۲}{۳}$ | $\alpha^۲+\beta^۲=(-۲)^۲-۲(\frac{-۲}{۳})$ |
| ۴) $\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳PS$ | ۵) $\lvert\alpha-\beta\rvert=\sqrt{S^۲-۴P}$ یا $\lvert\alpha-\beta\rvert=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$ | ۶) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}$ |
| $\alpha^۳+\beta^۳=(-۲)^۳-۳(\frac{-۲}{۳})(-۲)$ | $\lvert\alpha-\beta\rvert=\sqrt{(-۲)^۲-۴(\frac{-۲}{۳})}$ | در این مثال، چون $P$ منفی است، پس $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ تعریف نمی‌شود. |

**روابط بین ریشه‌ها**

**سه تذکر مهم:**

اگر رابطه، شکل متقارنی از $\alpha$ و $\beta$ بود، رابطه را ساده می‌کنیم و آن را بر حسب $S$ و $P$ می‌نویسیم.

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{-۲}{\frac{-۲}{۳}}=۳$$

اگر رابطه شکل نامتقارنی از $\alpha$ و $\beta$ بود، از این نکته که ریشه‌های معادله در خود معادله صدق میکنند استفاده می‌کنیم.

$$(۲-۶\alpha)(\beta)^۲ \xrightarrow{۲-۶\alpha=۳\alpha^۲} (۳\alpha^۲)(\beta^۲)=۳(\frac{-۲}{۳})^۲=\frac{۴}{۳}$$

در برخی موارد، با محاسبه ریشه ها، می‌توانیم عباراتی بر حسب $S$ و $P$ را به دست آوریم.

**2. اگر $x_1$ و $x_2$ ریشه‌های حقیقی و متمایز معادله $(2m-3)x^2-2mx+m-2=0$ باشند و $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<1$، آنگاه مقادیر m شامل چند عدد طبیعی است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ: گزینه ۱**

شرط این‌که معادله‌ی $(2m-3)x^2-2mx+m-2=0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز باشد:

$$\begin{cases} 2m-3\neq 0 \to m\neq \frac{3}{2} & (1) \\ \Delta>0 \to (-2m)^2-4(2m-3)(m-2)>0 \xrightarrow{\div 4} \end{cases}$$

$$\to m^2-(2m-3)(m-2)>0 \to -m^2+7m-6>0 \to 1<m<6 \quad (2)$$

از طرفی باید $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<1$ باشد:

$$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}<1 \to \frac{S}{P}-1<0 \to \frac{S-P}{P}<0$$

$$\to \begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{2m}{2m-3} \\ x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{m-2}{2m-3} \end{cases} \to \frac{\frac{2m}{2m-3}-\frac{m-2}{2m-3}}{\frac{m-2}{2m-3}}<0 \xrightarrow{m\neq\frac{3}{2}} \frac{m+2}{m-2}<0 \to -2<m<2 \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)\cap(3)} (1,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},2) \to \text{فاقد عدد طبیعی}$$

**3. مجموع ریشه‌های حقیقی معادله درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ برابر با ۲ است. اگر رابطهٔ $a-b+c=0$ بین ضرایب معادله برقرار باشد، مقدار $\frac{c}{a}$ کدام است؟**

۱) $-1$ ۲) $-2$ ۳) $-3$ ۴) $-4$

**پاسخ: گزینه ۳**

اگر ریشه‌های حقیقی معادله را $x_1$ و $x_2$ در نظر بگیریم، با توجه به صورت سوال، مجموع ریشه‌ها برابر $S=x_1+x_2=2$ است. حالا طرفین رابطه‌ی $a-b+c=0$ را بر a تقسیم می‌کنیم:

$$a-b+c=0 \xrightarrow{\div a} 1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow 1+S+P=0 \Rightarrow 1+2+x_1x_2=0 \Rightarrow x_1x_2=-3 \Rightarrow P=\frac{c}{a}=-3$$

**4. اگر $x_1$ و $x_2$ ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $2x^2-4x+m=0$ باشند و رابطهٔ $x_1^{x_1+x_2}+x_2^{x_1+x_2}=32$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، حاصل‌ضرب ریشه‌ها کدام است؟**

۱) ۷ ۲) $-7$ ۳) ۱۴ ۴) $-14$

**پاسخ: گزینه ۴**

$$2x^2-4x+m=0 \rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}=2 \quad , \quad x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{m}{2}$$

$$\rightarrow x_1^{x_1+x_2}+x_2^{x_1+x_2}=32 \rightarrow x_1^2+x_2^2=32 \rightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=32 \rightarrow (2)^2-2(\frac{m}{2})=32$$

$$\rightarrow 4-m=32 \rightarrow m=-28 \rightarrow x_1x_2=\frac{m}{2}=-\frac{28}{2}=-14$$

**5. اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2-ax+b=0$ برابر $\alpha$ و ۳ و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2+cx+d=0$ برابر $-\alpha$ و ۵ باشد، مقدار $a-c$ کدام است؟**

۱) $-2$ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۸

**پاسخ: گزینه ۴**

ابتدا در معادله‌ی $x^2-ax+b=0$، مجموع ریشه‌ها را می‌نویسیم. درضمن می‌دانیم $\alpha$ و ۳ ریشه‌های این معادله هستند:

$$S_1=\alpha+3=a \qquad (1)$$

همچنین می‌دانیم $-\alpha$ و ۵ ریشه‌های معادله‌ی $x^2+cx+d=0$ هستند، پس مجموع ریشه‌های این معادله برابر است با:

$$S_2=-\alpha+5=-c \qquad (2)$$

حالا روابط (۱) و (۲) را باهم جمع می‌کنیم و داریم:

$$(1)+(2):(\alpha+3)+(-\alpha+5)=a-c \Rightarrow a-c=8$$

**6. اگر $x_1$ و $x_2$ ریشه‌های معادله درجه‌ی دوم $ax^2-2x+c=0$ باشند و $a<0$ و $ac<a$ آن‌گاه کدام گزینه درست است؟**

۱) $x_1<x_2<0$ ۲) $x_1<0<x_2 \quad , \quad |x_1|>|x_2|$

۳) $x_1<0<x_2 \quad , \quad |x_1|<|x_2|$ ۴) $0<x_1<x_2$

**پاسخ: گزینه ۲**

چون $a<0$ و $ac<a$ است، داریم: $ac<a \xrightarrow{a<0} c>1$

بنابراین حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $x_1x_2=\frac{c}{a}<0$ است، پس معادله دارای یک ریشه‌ی حقیقی مثبت و یک ریشهٔ حقیقی منفی است. از طرفی مجموع ریشه‌ها برابر $x_1+x_2=\frac{2}{a}<0$ است و چون مجموع ریشه‌ها مقداری منفی است، پس قدر مطلق ریشهٔ منفی بزرگ‌تر می‌باشد و گزینه‌ی (۲) صحیح می‌باشد.

**علامت ریشه‌ها**

در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، اگر $\Delta \geq 0$ باشد، می‌توانیم به کمک حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌ها، علامت ریشه‌های معادله را تحلیل کنیم.

اگر $P>0$ و $S>0$ باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی مثبت است.
در سوالات پارامتری، تمامی شرط‌ها را بررسی می‌کنیم و در نهایت جواب ها را با هم اشتراک می‌گیریم.

در معادله $x^2-3x+1=0$، چون $P>0$ و $S>0$ است، معادله دارای دو ریشه حقیقی مثبت است.

اگر $P>0$ و $S<0$ باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی منفی است.
در سوالات پارامتری، تمامی شرط‌ها را بررسی می‌کنیم و در نهایت جواب ها را با هم اشتراک می‌گیریم.

| | | |
|---|---|---|
| علامت ریشه‌ها | | در معادله $x^۲+۵x+۲=۰$ ، چون $P>۰$ و $S<۰$ است، معادله دارای دو ریشه حقیقی منفی است. |
| | | اگر $p<۰$ باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی مختلف العلامت است.<br>در سوالات پارامتری، تنها کافی است شرط $P<۰$ را بررسی کنیم و نیازی به بررسی شرط $\Delta$ نیست. |
| | | در معادله $x^۲+x-۱=۰$، چون $P<۰$ است، معادله دارای دو ریشه حقیقی مختلف العلامت است. |
| | حالت‌های خاص | اگر ریشه‌های معادله قرینه یکدیگر باشند، $S=۰$ است؛ یعنی $b=۰$ است. |
| | | در معادله $x^۲-۴=۰$، چون $b=۰$ است، پس ریشه‌ها قرینه یکدیگرند. |
| | | اگر ریشه‌های معادله معکوس یکدیگر باشند، $P=۱$ است؛ یعنی $a=c \Rightarrow \frac{c}{a}=۱$ است. |
| | | در معادله $x^۲+۳x+۱=۰$، چون $P=۱$ است، پس ریشه‌ها معکوس یکدیگرند. |
| | | اگر یکی از ریشه‌های معادله صفر باشد، $P=۰$ است؛ یعنی $c=۰$ است. |
| | | در معادله $x^۲+x=۰$، چون $c=۰$ است، پس یکی از ریشه‌های معادله $x=۰$ است. |

**7. اگر نقطه رأس سهمی $f(x)=x^۲-۴x+m^۲+۳$ در ناحیه چهارم دستگاه مختصات باشد، مقادیر $m$ کدام است؟**

۱) $|m|>۱$ ۲) $|m|<۱$ ۳) $m<۲$ ۴) $-۳<m<۲$

**پاسخ: گزینه ۲**

برای آن‌که نقطهٔ رأس سهمی $y=x^۲-۴x+m^۲+۳$ در ناحیهٔ چهارم قرار بگیرد، باید طول رأس سهمی مثبت و عرض رأس سهمی منفی باشد:

۱) $x_S=-\frac{-۴}{۲(۱)}=۲>۰$

۲) $y_S=(۲)^۲-۴(۲)+m^۲+۳<۰ \Rightarrow m^۲-۱<۰ \Rightarrow m^۲<۱ \Rightarrow |m|<۱$

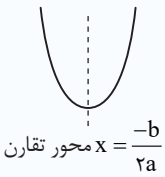
از اشتراک بازه‌ها $|m|<۱$ است.

| | | |
|---|---|---|
| رسم سهمی | | نمودار تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ سهمی نام دارد.<br>اگر $a>۰$ باشد، نمودار دارای مینیمم است و شکل آن به صورت  است. مقدار مینیمم تابع برابر $y_S$ است.<br>و اگر $a<۰$ باشد، نمودار دارای ماکزیمم است و شکل آن به صورت  است. مقدار ماکزیمم تابع برابر $y_S$ است. |
| | مختصات رأس سهمی: | در شکل گسترده تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$، مختصات راس سهمی به صورت $S(\frac{-b}{۲a},f(\frac{-b}{۲a}))$ است.<br>مختصات عرض راس سهمی را می‌توانیم به صورت $y_S=f(\frac{-b}{۲a})=\frac{-\Delta}{۴a}$ نیز بنویسیم. |
| | | در تابع $f(x)=۳x^۲-۶x+۱$، مختصات راس سهمی به صورت مقابل است.<br>$S(\frac{-b}{۲a},f(\frac{-b}{۲a})) \Rightarrow S(۱,-۲)$ |
| | | در شکل مربع کامل تابع $f(x)=a(x-h)^۲+k$، مختصات راس سهمی به صورت $S(h,k)$ است. |
| | | در تابع $f(x)=۳(x+۲)^۲-۱$، مختصات راس سهمی به صورت $S(-۲,-۱)$ است. |

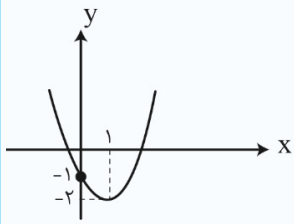
**رسم سهمی**

**مراحل رسم سهمی**

۱) مختصات راس سهمی را به دست می‌آوریم.
۲) مختصات یک نقطه قبل و یک نقطه بعد راس را به دست می‌آوریم.
۳) سه نقطه را با توجه به شکل تابع سهمی به هم متصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم.




برای رسم نمودار تابع $f(x)=x^2-2x-1$، ابتدا مختصات راس آن را پیدا می‌کنیم که برابر $S(1,-2)$ است.
با پیدا کردن مختصات نقاط با طول $x=0$ و $x=2$، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.




به محل برخورد نمودار یک تابع با محور $x$ ها، صفرهای تابع می‌گوییم که در واقع ریشه‌های معادله $f(x)=0$ هستند.

برای پیدا کردن صفرهای تابع $f(x)=x^2-2x-3$، ریشه‌های معادله $f(x)=0$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x)=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=3 \quad و \quad x_2=-1$$

بنابراین $x=3$ و $x=-1$، صفرهای تابع $f(x)$ هستند.

وسط هر دو نقطه هم عرض روی سهمی، خط $x=\frac{-b}{2a}$ (محور تقارن سهمی) است.

اگر نقاط $A(1,5)$ و $B(7,5)$ نقاطی روی یک سهمی باشند، محور تقارن سهمی خط $x=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+7}{2}=4$ است.

**8. در تابع درجه دوم $f(x)=x^2-(a^2-3a+5)x+a^3$ اگر $f(x_1)=f(x_2)=0$ و $x_1=\sqrt{x_2}$ باشد، $a$ کدام است؟**

۱) $\frac{12}{5}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

**پاسخ: گزینه ۳**

$x_1$ و $x_2$ ریشه‌های تابع $f(x)$ هستند:

$$x_1=\sqrt{x_2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x_1^2=x_2 \xrightarrow[x_1\neq 0]{\times x_1} x_1^3=x_1x_2=a^3 \rightarrow x_1=a$$

حال ریشه در معادله‌اش صدق می‌کند، بنابراین:

$$x^2-(a^2-3a+5)x+a^3=0 \rightarrow x_1=a\neq 0$$

$$a^2-(a^2-3a+5)a+a^3=0 \rightarrow a^2-a^3+3a^2-5a+a^3=0$$

$$4a^2-5a=0 \rightarrow a(4a-5)=0 \rightarrow \begin{cases} a=0 \times \\ a=\frac{5}{4} \checkmark \end{cases}$$

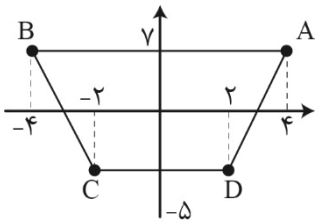
**9. نمودار تابع $f(x)=x^2-9$ و خط‌های $y=7$ و $y=-5$ در چهار نقطه $A,B,C$ و $D$ متقاطع‌اند. مساحت ذوزنقه $ABCD$ کدام است؟**

۱) ۳۶ ۲) ۷۲ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

**پاسخ: گزینه ۲**

تابع $f(x)$ را با خط‌های $y=7$ و $y=-5$ تلاقی می‌دهیم:

$$\begin{cases} f(x)=x^2-9 \\ y=7 \end{cases} \rightarrow x^2-9=7 \rightarrow x^2=16 \rightarrow x=\pm 4 \rightarrow A(4,7) \quad , \quad B(-4,7)$$




$$\begin{cases} f(x)=x^۲-۹ \\ y=-۵ \end{cases} \rightarrow x^۲-۹=-۵ \rightarrow x^۲=۴ \rightarrow x=\pm ۲ \rightarrow C(-۲,-۵) \quad , \quad D(۲,-۵)$$

$$|AB|=۸$$

$$|CD|=۴$$

$$\text{ارتفاع}=۱۲$$

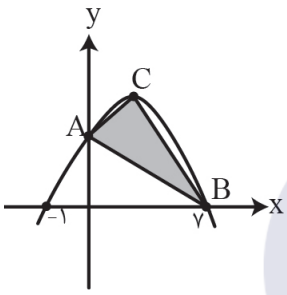
$$S_{ABCD}=\frac{\text{مجموع دو قاعده}}{۲}\times \text{ارتفاع}=\frac{(۸+۴)}{۲}\times ۱۲=۷۲$$

**10. نمودار تابع $f(x)=-x^۲+۶x+۷$ محور $y$ها را در نقطهٔ $A$ و محور $x$ها را در نقطهٔ $B$ با طول مثبت قطع می‌کند. اگر نقطه $C$ رأس این سهمی باشد، مساحت مثلث $ABC$ کدام است؟**

۱) ۹۰ ۲) ۴۲ ۳) ۴۵ ۴) ۸۴

**پاسخ: گزینه ۲**

مختصات نقاط $C$ و $B$ و $A$ را می‌یابیم:




$$x=۰ \rightarrow y=۷ \rightarrow A(۰,۷)$$

$$f(x)=-x^۲+۶x+۷=۰ \rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=۷ \rightarrow B(۷,۰) \end{cases}$$

$$x_C=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۶}{۲(-۱)}=۳ \rightarrow C(۳,۱۶)$$

حال مساحت مثلث $ABC$ را می‌یابیم.

$$S=\frac{۱}{۲}\left|\begin{matrix} ۰ & ۷ & ۳ & ۰ \\ ۷ & ۰ & ۱۶ & ۷ \end{matrix}\right|=\frac{۱}{۲}|(۰\times ۰+۷\times ۱۶+۳\times ۷)-(۷\times ۷+۳\times ۰+۰\times ۱۶)|=\frac{۱}{۲}|۱۱۲+۲۱-۴۹|=۴۲$$

**1. به ازای چند مقدار صحیح x، رابطه‌ی $\sqrt{۶} < \sqrt[۳]{x} < \sqrt[۶]{۳۰۰}$ برقرار است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

**پاسخ: گزینه ۲**

طرفین نامعادله را به توان ۶ می‌رسانیم:

$$\sqrt{۶} < \sqrt[۳]{x} < \sqrt[۶]{۳۰۰} \xrightarrow[x>۰]{\text{به توان ۶}} (\sqrt{۶})^۶ < (\sqrt[۳]{x})^۶ < (\sqrt[۶]{۳۰۰})^۶$$

$$\to ۶^۳ < x^۲ < ۳۰۰ \to ۲۱۶ < x^۲ < ۳۰۰ \xrightarrow[x>۰]{x\in\mathbb{Z}} x = ۱۵,۱۶,۱۷$$

پس سه مقدار صحیح برای x وجود دارد.

**2. اگر $x^۳ - ۳x^۲ + ۳x + ۷ = (x+۱)(ax^۲ + bx + c)$ باشد، مقدار $\frac{a}{c}$ کدام است؟**

۱) ۷ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $-\frac{۴}{۷}$ ۴) $-\frac{۷}{۴}$

**پاسخ: گزینه ۲**

$$\text{عبارت اول} = x+۱$$

$$\text{عبارت دوم} = ax^۲ + bx + c$$

از ضرب جمله‌ی x عبارت اول در جمله‌ی $ax^۲$ عبارت دوم، جمله‌ی $x^۳$ ایجاد می‌شود، پس:

$$x(ax^۲) = ax^۳ = x^۳ \to a = ۱$$

و همچنین از ضرب جمله‌ی ۱ عبارت اول و جمله‌ی c عبارت دوم، جمله‌ی ۷ ایجاد می‌شود، بنابراین:

$$۱ \times c = ۷ \to c = ۷ \to \frac{a}{c} = \frac{۱}{۷}$$

**3. اگر $x>۰$ ; $f(x) = x + \frac{۱}{x}$ و $f(a^۲) = ۲۳$ باشد، مقدار $f(a^۳)$ کدام است؟**

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۵۰

**پاسخ: گزینه ۲**

می‌دانیم $a^۲ + b^۲ = (a+b)^۲ - ۲ab$ ، $a^۳ + b^۳ = (a+b)^۳ - ۳ab(a+b)$، بنابراین:

$$f(x) = x + \frac{۱}{x} \xrightarrow[f(x)>۰]{x>۰} f(a) = a + \frac{۱}{a} > ۰$$

$$f(a^۲) = a^۲ + \frac{۱}{a^۲} = (a + \frac{۱}{a})^۲ - ۲ = f^۲(a) - ۲ = ۲۳$$

$$\to f^۲(a) = ۲۵ \xrightarrow{f(a)>۰} f(a) = ۵$$

$$f(a^۳) = a^۳ + \frac{۱}{a^۳} = (a + \frac{۱}{a})^۳ - ۳(a + \frac{۱}{a}) = f^۳(a) - ۳f(a) = ۱۲۵ - ۱۵ = ۱۱۰$$

**4. اگر $\sqrt{a} = \sqrt{۲} + ۱$ و $\sqrt{b} = \sqrt{۲} - ۱$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ کدام است؟**

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

**پاسخ: گزینه ۳**

$$\begin{aligned} \sqrt{a} = \sqrt{۲} + ۱ &\xrightarrow{\text{توان ۲}} a = ۳ + ۲\sqrt{۲} \\ \sqrt{b} = \sqrt{۲} - ۱ &\xrightarrow{\text{توان ۲}} b = ۳ - ۲\sqrt{۲} \end{aligned} \to \begin{cases} a+b = ۶ \\ a-b = ۴\sqrt{۲} \end{cases} \to \frac{a-b}{a+b} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۶} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

**5. اگر $\sqrt[۴]{۲^۶\sqrt{x+۱}}=\sqrt{۲^۳\sqrt[۳]{۴\sqrt{۸}}}$ باشد، حاصل $\sqrt{x+۱}$ کدام است؟**

۱) ۲۵۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۲۰۵۶

**پاسخ: گزینه ۳**

$$\sqrt{۲^۳\sqrt[۳]{۴\sqrt{۸}}}=\sqrt[۴]{۲^۶\sqrt{x+۱}} \qquad (*)$$

ابتدا دو طرف تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{۲^۳\sqrt[۳]{۴\sqrt{۸}}}=\sqrt{\sqrt[۳]{۲^۳\times۴\sqrt{۸}}}=\sqrt[۶]{۲^۵\sqrt{۸}}=\sqrt[۶]{\sqrt{۲^{۱۰}\times۸}}=\sqrt[۱۲]{۲^{۱۳}}$$

$$\sqrt[۴]{۲^۶\sqrt{x+۱}}=\sqrt[۴]{\sqrt[۶]{۲^۶(x+۱)}}=\sqrt[۲۴]{۶۴(x+۱)}$$

با جای‌گذاری عبارت‌های بالا در $(*)$ داریم:

$$\sqrt{۲^۳\sqrt[۳]{۴\sqrt{۸}}}=\sqrt[۴]{۲^۶\sqrt{x+۱}}\rightarrow\sqrt[۱۲]{۲^{۱۳}}=\sqrt[۲۴]{۶۴(x+۱)}$$

حال طرفین تساوی را به توان ۲۴ می‌رسانیم:

$$۲^{۲۶}=۶۴(x+۱)\rightarrow x+۱=\frac{۲^{۲۶}}{۲^۶}=۲^{۲۰}\xrightarrow{\sqrt{\ }}\sqrt{x+۱}=۲^{۱۰}=۱۰۲۴$$

**6. حاصل عبارت $(\sqrt{۱۴+۶\sqrt{۵}}-\sqrt{۱۴-۶\sqrt{۵}})(\sqrt{۳+\sqrt{۵}}+\sqrt{۳-\sqrt{۵}})$ کدام است؟**

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۱۰\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

**پاسخ: گزینه ۳**

با توجه به نکته‌ی $\sqrt{(a+b)\pm۲\sqrt{ab}}=|\sqrt{a}\pm\sqrt{b}|$ داریم:

$$\sqrt{۱۴+۶\sqrt{۵}}=\sqrt{۱۴+۲\sqrt{۹\times۵}}=|\sqrt{۹}+\sqrt{۵}|=۳+\sqrt{۵}$$

$$\sqrt{۱۴-۶\sqrt{۵}}=\sqrt{۱۴-۲\sqrt{۹\times۵}}=|\sqrt{۹}-\sqrt{۵}|=۳-\sqrt{۵}$$

$$A=\sqrt{۳+\sqrt{۵}}+\sqrt{۳-\sqrt{۵}}\xrightarrow[A>۰]{\text{توان ۲}}A^۲=۳+\sqrt{۵}+۳-\sqrt{۵}+۲\sqrt{۳+\sqrt{۵}}\times\sqrt{۳-\sqrt{۵}}$$

$$\rightarrow A^۲=۶+۲\sqrt{(۳+\sqrt{۵})(۳-\sqrt{۵})}=۶+۲\sqrt{۹-۵}=۶+۲(۲)=۱۰\rightarrow A=\sqrt{۱۰}$$

حال با جای‌گذاری عبارت‌های بالا می‌توان نوشت:

$$(\sqrt{۱۴+۶\sqrt{۵}}-\sqrt{۱۴-۶\sqrt{۵}})(\sqrt{۳+\sqrt{۵}}+\sqrt{۳-\sqrt{۵}})=(۳+\sqrt{۵}-(۳-\sqrt{۵}))(\sqrt{۱۰})=۲\sqrt{۵}\times\sqrt{۱۰}=۲\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}\times\sqrt{۲}=۱۰\sqrt{۲}$$

**7. اگر $\sqrt{x+\sqrt{۲}}+\sqrt{x-\sqrt{۲}}=۴$ باشد، حاصل $\sqrt{x+\sqrt{۲}}-\sqrt{x-\sqrt{۲}}$ کدام است؟**

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

**پاسخ: گزینه ۴**

دو عبارت داده شده مزدوج هم هستند. از ضرب این دو عبارت در هم داریم:

$$A=\sqrt{x+\sqrt{۲}}-\sqrt{x-\sqrt{۲}}$$

$$(\sqrt{x+\sqrt{۲}}+\sqrt{x-\sqrt{۲}})(\sqrt{x+\sqrt{۲}}-\sqrt{x-\sqrt{۲}})=۴A$$

$$\rightarrow(x+\sqrt{۲})-(x-\sqrt{۲})=۴A\rightarrow۲\sqrt{۲}=۴A$$

$$\rightarrow A=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\rightarrow\sqrt{x+\sqrt{۲}}-\sqrt{x-\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

**8.** حاصل $\frac{\sqrt[4]{5-2\sqrt[4]{36}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$ کدام است؟

۱) $2-\sqrt{2}$ ۲) $2-\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{2}-1$ ۴) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

**پاسخ: گزینه ۴**

ابتدا صورت کسر را ساده کرده و سپس کسر را گویا می‌کنیم.

$$\sqrt[4]{5-2\sqrt[4]{36}}=\sqrt[4]{5-2\sqrt[4]{6^2}}=\sqrt[4]{5-2\sqrt{6}}=\sqrt[4]{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

حال با جای‌گذاری صورت کسر داریم:

$$\frac{\sqrt[4]{5-2\sqrt[4]{36}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{3-2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

**9.** دو عدد حقیقی $a$ و $b$ را در نظر بگیرید. اگر $0<a<b$ باشد و $x=\sqrt{a+b-\sqrt{4ab}}$ و $y=4a+4b+\sqrt{64ab}$ باشد، حاصل $\frac{2x+\sqrt{y}}{\sqrt{y}-2x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{ab}$ ۲) $ab$ ۳) $\frac{b}{a}$ ۴) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

**پاسخ: گزینه ۴**

ابتدا عبارت‌های $x$ و $y$ را تا حد ممکن ساده می‌کنیم:

$$x=\sqrt{a+b-\sqrt{4ab}}=\sqrt{b-2\sqrt{ab}+a}=\sqrt{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}=|\sqrt{b}-\sqrt{a}|\xrightarrow{0<a<b}x=\sqrt{b}-\sqrt{a}$$

حالا به سراغ ساده‌سازی عبارت $y$ می‌رویم:

$$y=4a+4b+\sqrt{64ab}=4a+8\sqrt{ab}+4b=(2\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2\Rightarrow\sqrt{y}=\sqrt{(2\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2}\Rightarrow\sqrt{y}=2\sqrt{a}+2\sqrt{b}$$

بنابراین حاصل $\frac{2x+\sqrt{y}}{\sqrt{y}-2x}$ برابر است با:

$$\frac{2x+\sqrt{y}}{\sqrt{y}-2x}=\frac{2(\sqrt{b}-\sqrt{a})+(2\sqrt{a}+2\sqrt{b})}{(2\sqrt{a}+2\sqrt{b})-2(\sqrt{b}-\sqrt{a})}=\frac{4\sqrt{b}}{4\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

**10.** اگر $x=\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}+\sqrt[3]{3}}$ و $y=\sqrt[3]{3-\sqrt{10}}\times\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}}$ باشد، مقدار $x^6+y$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

**پاسخ: گزینه ۱**

ابتدا عبارت $x$ را تا حد ممکن ساده می‌کنیم:

$$x=\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}+\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[6]{3^2}+\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{3}+\sqrt[6]{3^2}}=\frac{\sqrt[6]{9}+\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{3}+\sqrt[6]{9}}=\frac{\sqrt[6]{9}(1+\sqrt[6]{3})}{\sqrt[6]{3}(1+\sqrt[6]{3})}=\frac{\sqrt[6]{9}}{\sqrt[6]{3}}=\sqrt[6]{3}$$

همچنین می‌دانیم $19+6\sqrt{10}=(3+\sqrt{10})^2$ است. حالا به سراغ محاسبه $y$ می‌رویم:

$$y=\sqrt[3]{3-\sqrt{10}}\times\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}}=\sqrt[3]{3-\sqrt{10}}\times\sqrt[6]{(3+\sqrt{10})^2}=\sqrt[3]{3-\sqrt{10}}\times\sqrt[3]{3+\sqrt{10}}=\sqrt[3]{9-10}=\sqrt[3]{-1}=-1$$

$$\Rightarrow x^6+y=(\sqrt[6]{3})^6+(-1)=3-1=2$$

**1. اگر $f(x)=(\frac{m^2-m-6}{3m^2+5m-2})^x$ تابعی نمایی باشد، حدود m شامل چند عدد طبیعی نیست؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۳**

در تابع نمایی $y=a^x$ باید $a>0$ و $a\neq 1$ باشد:

$$\frac{m^2-m-6}{3m^2+5m-2}>0 \rightarrow \frac{(m-3)(m+2)}{(3m-1)(m+2)}>0$$

| | $-2$ | | $\frac{1}{3}$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m^2-m-6$ | + | ۰ | − | − | ۰ | + |
| $3m^2+5m-2$ | + | ۰ | − | ۰ | + | + |
| کل | + | ت ن | + | ت ن | − | ۰ + |

جواب: $(-\infty,\frac{1}{3})\cup(3,+\infty)-\{-2\}$

از طرفی باید $\frac{m^2-m-6}{3m^2+5m-2}\neq 1$ باشد:

$$m^2-m-6\neq 3m^2+5m-2 \rightarrow 2m^2+6m+4\neq 0$$
$$\rightarrow m\neq -1,-2$$

بنابراین حدود m به صورت $(-\infty,\frac{1}{3})\cup(3,+\infty)-\{-2,-1\}$ است که شامل سه عدد طبیعی $\{1,2,3\}$ نیست.

**2. اگر مجموعهٔ جواب نامعادله‌ی $(\sqrt{2}-1)^{2x^2}>(5\sqrt{2}+7)^{3-3x}$، بازه‌ی $(a,b)$ باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

**پاسخ: گزینه ۳**

ابتدا ملاحظه می‌کنیم که:

$$(\sqrt{2}+1)^3=5\sqrt{2}+7$$
$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}+1)^{-1}$$

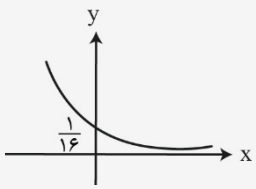
بنابراین داریم:

$$(\sqrt{2}-1)^{2x^2}>(5\sqrt{2}+7)^{3-3x} \Rightarrow (\sqrt{2}+1)^{-2x^2}>(\sqrt{2}+1)^{9-9x}$$
$$\xrightarrow{\sqrt{2}+1>1} -2x^2>9-9x \Rightarrow 2x^2-9x+9<0 \Rightarrow (x-3)(2x-3)<0$$
$$\Rightarrow \frac{3}{2}<x<3$$

در نتیجه:

$$b-a=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

**3. توابع $f(x)=(4a^2-1)x^2+(1-2a)x+b$ و $g(x)=(a+1)^x$ مفروض است. اگر نمودار تابع نمایی $gof(x)$ به صورت زیر باشد، مقدار $f(ab)$ کدام است؟**




۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{4}$ ۴) صفر

**پاسخ: گزینه ۴**

ابتدا ضابطه‌ی تابع $gof(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$gof(x)=(a+1)^{(4a^2-1)x^2+(1-2a)x+b}$$

طبق نمودار تابع نمایی داده شده، ضریب $x^2$ در توان باید صفر باشد:

$$4a^2-1=0 \Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}$$

اگر $a=\frac{1}{2}$ باشد، ضریب $x$ نیز صفر شده و تابع ثابت خواهد بود. در نتیجهٔ $a=-\frac{1}{2}$ قابل‌قبول است. پس:

$$f(x)=(-\frac{1}{2}+1)^{2x+b} \xrightarrow{\text{نقطه}(0,\frac{1}{16})} \frac{1}{16}=(\frac{1}{2})^b \Rightarrow b=4$$

حال $f(ab)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=2x+4 \Rightarrow f(ab)=f(-2)=2(-2)+4=0$$

**4. اگر $\log_{18}54=\frac{k+2}{k+1}$ باشد، حاصل $\log_3 12$ کدام است؟**

۱) $k+1$ ۲) $2k-1$ ۳) $k$ ۴) $2k-2$

**پاسخ: گزینه ۲**

ابتدا $\log_{18}54$ را ساده می‌کنیم:

$$\log_{18}18\times3=\log_{18}18+\log_{18}3=\frac{k+2}{k+1} \rightarrow \log_{18}3=\frac{k+2}{k+1}-1=\frac{1}{k+1}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \log_3 18=k+1 \rightarrow \log_3 9\times2=\log_3 9+\log_3 2=k+1$$

$$\rightarrow 2+\log_3 2=k+1 \rightarrow \log_3 2=k-1$$

حال $\log_3 12$ را ساده کرده و بر حسب $\log_3 2$ می‌نویسیم:

$$\log_3 12=\log_3 3\times2^2=\log_3 3+\log_3 2^2=1+2\log_3 2$$

$$=1+2(k-1)=2k-1$$

**نکته**

$$(1)\log2=1-\log5, \log5=1-\log2$$

$$(2)\log_c^{ab}=\log_c^a+\log_c^b$$

$$(3)\log_c^{\frac{a}{b}}=\log_c^a-\log_c^b$$

در سؤال‌ها بسیار پیش می‌آید که $\log2$ را می‌دهند و $\log5$ را می خواهند و برعکس. پس بهتر است روابط زیر را حفظ کنیم:

$$\log5=\log^{\frac{10}{2}}=\log10-\log2=1-\log2$$

$$\log2=\log^{\frac{10}{5}}=\log10-\log5=1-\log5$$

برخی از ویژگی‌های لگاریتم:

$$\log_b^a+\log_b^c=\log_b^{ac}$$

$$\log_b^a-\log_b^c=\log_b^{\frac{a}{c}}$$

$$\log_{b^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\log_b^a$$

نکته ۱:

$$\log_b^a\times\log_a^c=\log_b^c$$

نکته ۲: $\log_b^a = \frac{۱}{\log_a^b}$

نکته ۳: $\log_{mn}^{ab} = \log_{mn}^{a} + \log_{mn}^{b} = \frac{۱}{\log_a^{mn}} + \frac{۱}{\log_b^{mn}}$

**5. اگر $\frac{\log_۲ ۳ + \log_۵ ۳}{\log_۲ ۳ \times \log_۵ ۳} = a$ باشد، حاصل $\frac{۱}{۱+\log_۲ ۱۵} + \frac{۱}{۱+\log_۵ ۶}$ بر حسب a کدام است؟**

۱) $\frac{a+۱}{a}$ ۲) $\frac{a}{a+۱}$ ۳) $\frac{۱}{a-۱}$ ۴) $\frac{a-۱}{a}$

**پاسخ: گزینه ۲**

ابتدا عبارت داده شده در صورت سوال را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{\log_۲ ۳ + \log_۵ ۳}{\log_۲ ۳ \times \log_۵ ۳} = a \xrightarrow{\text{تفکیک کسر}} \frac{\log_۲ ۳}{\log_۲ ۳ \times \log_۵ ۳} + \frac{\log_۵ ۳}{\log_۲ ۳ \times \log_۵ ۳} = \frac{۱}{\log_۵ ۳} + \frac{۱}{\log_۲ ۳}$$

با توجه به نکته‌ی $\log_b a = \frac{۱}{\log_a b}$ داریم:

$$\frac{۱}{\log_۵ ۳} + \frac{۱}{\log_۲ ۳} = \log_۳ ۵ + \log_۳ ۲ = \log_۳ ۱۰ = a \rightarrow \log_{۱۰} ۳ = \frac{۱}{a}$$

حال حاصل عبارت خواسته شده را می‌یابیم:

$$\frac{۱}{۱+\log_۲ ۱۵} + \frac{۱}{۱+\log_۵ ۶} = \frac{۱}{\log_۲ ۲ + \log_۲ ۱۵} + \frac{۱}{\log_۵ ۵ + \log_۵ ۶}$$

$$= \frac{۱}{\log_۲ ۳۰} + \frac{۱}{\log_۵ ۳۰} = \log_{۳۰} ۲ + \log_{۳۰} ۵ = \log_{۳۰} ۱۰$$

$$= \frac{۱}{\log_{۱۰} ۳۰} = \frac{۱}{\log_{۱۰} ۳ + \log_{۱۰} ۱۰} = \frac{۱}{\frac{۱}{a}+۱} = \frac{a}{a+۱}$$

**6. اگر $\log_۸ ۵ = a$ و $\log_۴ ۳ = b$ باشد، مقدار $\log_{۱۵} ۹$ کدام است؟**

۱) $\frac{۲b}{۲b+۳a}$ ۲) $\frac{۴a}{۲a+۳b}$ ۳) $\frac{۴b}{۲b+۳a}$ ۴) $\frac{۲a}{۲a+۳b}$

**پاسخ: گزینه ۳**

ابتدا عبارت‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \log_۴ ۳ = b \rightarrow \log_{۲^۲} ۳ = b \rightarrow \frac{۱}{۲}\log_۲ ۳ = b \rightarrow \log_۲ ۳ = ۲b \\ \log_۸ ۵ = a \rightarrow \log_{۲^۳} ۵ = a \rightarrow \frac{۱}{۳}\log_۲ ۵ = a \rightarrow \log_۲ ۵ = ۳a \end{cases}$$

حال با استفاده از تغییر مبنای لگاریتم داریم:

$$\log_{۱۵} ۹ \xrightarrow{\text{تغییر مبنا به ۲}} \frac{\log_۲ ۹}{\log_۲ ۱۵} = \frac{\log_۲ ۳^۲}{\log_۲ ۳ \times ۵} = \frac{۲\log_۲ ۳}{\log_۲ ۳ + \log_۲ ۵}$$

$$= \frac{۲(۲b)}{۲b+۳a} = \frac{۴b}{۲b+۳a}$$

**7. اگر $\log_x (۳x) \times \log_۳ x^۳ = ۹$ باشد، حاصل $\log_{(x-۳)} ۴x$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۲**

ابتدا عبارت‌ها را ساده کرده و $x$ را می‌یابیم:

$$\log_x 3x\times\log_3 x^3=9\to(\log_x 3+1)(3\log_3 x)=9\Rightarrow(1+\log_x^3)(\log_3^x)=3$$

$$\to(\log_x 3\times\log_3 x)+\log_3 x=3$$

$$\to 1+\log_3 x=3\to\log_3 x=2$$

$$\to x=3^2=9$$

با جای‌گذاری $x=9$ داریم: $\log_{x-3} 4x=\log_{(9-3)}(4\times9)=\log_6 36=\log_6 6^2=2$

**8. مجموعه جواب نامعادله‌ی $\log_2(6-x)\times\log_2(x-1)>0$ شامل چند عدد صحیح است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۲**

ابتدا دامنه‌ی لگاریتم‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}6-x>0\to x<6\\ x-1>0\to x>1\end{cases}\xrightarrow{\cap}1<x<6\qquad(1)$$

حاصل‌ضرب دو عبارت زمانی مثبت است که هر دو عبارت مثبت یا هر دو عبارت منفی باشند:

**حالت اول:**

$$\log_2(6-x)\times\log_2(x-1)>0$$

$$\to\begin{cases}\log_2(6-x)>0\to 6-x>2^0\to 6-x>1\to x<5\\ \log_2(x-1)>0\to x-1>2^0\to x-1>1\to x>2\end{cases}\xrightarrow{\cap}2<x<5$$

**حالت دوم:**

$$\begin{cases}\log_2(6-x)<0\to 6-x<2^0\to 6-x<1\to x>5\\ \log_2(x-1)<0\to x-1<2^0\to x-1<1\to x<2\end{cases}\xrightarrow{\cap}(2,5)\cup\varnothing=(2,5)\qquad(2)$$

حال از اشتراک (۱) و (۲) داریم:

$(1,6)\cap(2,5)=(2,5)\to$ شامل ۲ عدد صحیح است

**9. اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=\log_x|1-x^2|$ به صورت $(a,b)\cup(c,+\infty)$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ: گزینه ۳**

با توجه به تعریف دامنه‌ی تابع لگاریتم داریم:

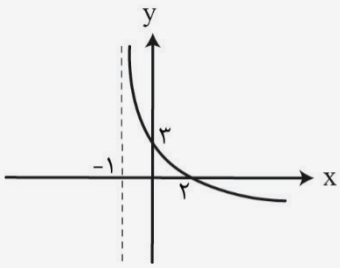
$$y=\log_{g(x)} f(x)\to\text{دامنه:}\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)>0\to\text{اشتراک}\\ g(x)\neq1\end{cases}$$

بنابراین:

$$f(x)=\log_x|1-x^2|\xrightarrow{\text{دامنه}}\begin{cases}|1-x^2|>0\to x\in\mathbb{R}-\{\pm1\}\\ x>0\\ x\neq1\end{cases}\xrightarrow{\cap}(0,+\infty)-\{1\}=(0,1)\cup(1,+\infty)$$

$$\to\begin{cases}a=0\\ b=1\to a+b+c=2\\ c=1\end{cases}$$

10. نمودار تابع $f(x)=\log_a(bx+c)$ به صورت مقابل است. مقدار $\frac{a^۳}{bc}$ کدام است؟




۱) $\frac{۱}{۹}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) ۹

۴) ۳

**پاسخ: گزینه ۴**

تابع از نقطه‌ی $(۲,۰)$ عبور می‌کند، پس:

$$۱)\ f(۲)=۰ \Rightarrow \log_a(۲b+c)=۰ \Rightarrow ۲b+c=۱$$

در ضمن دامنه‌ی تابع $x>-۱$ است، پس $x=-۱$ ریشه‌ی عبارت جلوی لگاریتم است:

$$۲)\ -b+c=۰ \Rightarrow b=c$$

از (۱) و (۲) مقادیر $b=c=\frac{۱}{۳}$ به دست می‌آید. از طرفی نمودار از نقطه‌ی $(۰,۳)$ عبور می‌کند، پس:

$$f(۰)=۳ \Rightarrow \log_a \frac{۱}{۳}=۳ \Rightarrow a^۳=\frac{۱}{۳}$$

سنجش کلاد

**1. اگر مجموعه‌ی $A=[m+1,m^2]\cap[9,15-m]$ مجموعه‌ی تک‌عضوی باشد، مجموع اعداد صحیح مجموعه‌ی $B=(-m^2,3m)$ کدام است؟ $(m\in\mathbb{N})$**

۱) صفر ۲) ۴۵ ۳) ۳ ۴) ۸۱

**پاسخ: گزینه ۱** متوسط | محاسباتی

برای آن‌که اشتراک دو بازه تک‌عضو باشد باید ابتدای یکی، انتهای دیگری باشد. بنابراین دو حالت داریم:

۱) $m^2=9\xrightarrow{m\in\mathbb{N}}m=3$

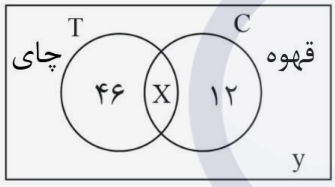
حال به ازای $m=3$ شرط بامعنی بودن بازه‌ها را بررسی می‌کنیم: $[4,9]\cap[9,12]=\{9\}$

۲) $15-m=m+1\rightarrow 2m=14\rightarrow m=7$

$[8,49]\cap[9,8]$ ×

پس $m=3$ قابل‌قبول است و $B=(-9,9)$ چون بازه‌ی B نسبت به مبدأ متقارن است مجموع اعداد صحیح موجود در بازه‌ی B صفر است.

**2. در یک نظرسنجی ۹۰ نفره، در مورد علاقه‌مندی به نوشیدنی چای و قهوه، ۴۶ نفر علاقه‌مند به نوشیدن فقط چای و ۱۲ نفر علاقه‌مند به نوشیدن فقط قهوه هستند. اگر تعداد علاقه‌مندان به چای ۳ برابر علاقه‌مندان به قهوه باشند، آن‌گاه چند نفر به هیچ‌کدام علاقه‌مند نیستند؟**




۱) ۱۷

۲) ۳

۳) ۲۷

۴) ۲۲

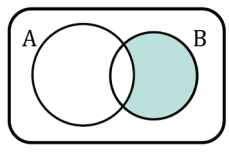
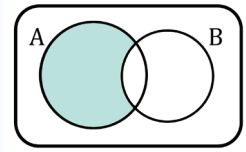
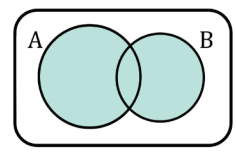
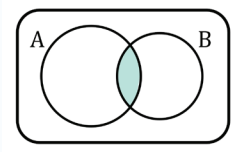
**پاسخ: گزینه ۳** آسان | محاسباتی

مجموعه‌ی افراد علاقه‌مند به چای: T

مجموعه‌ی افراد علاقه‌مند به قهوه: C

$n(T)=3n(C)\Rightarrow 46+x=3(12+x)\Rightarrow x=5$

تعداد کل افراد شرکت‌کننده در نظرسنجی ۹۰ نفر است بنابراین: $46+x+12+y=90\xrightarrow{x=5}y=27$

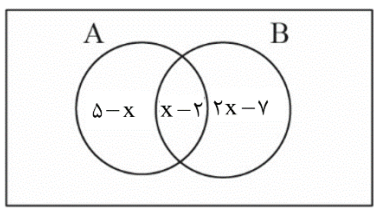
| جمع‌بندی اعمال در مجموعه‌ها | | | |
|---|---|---|---|
| سه عمل روی مجموعه‌ها قابل تعریف است: | | | |
| $B-A$ | $A-B$ | $A\cup B$ | $A\cap B$ |
|  |  |  |  |
| **تعداد اعضای تفاضل دو مجموعه** | اگر تعداد اعضای فقط مجموعه $A$ را بخواهیم: $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$ | | |
| **تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه** | اگر تعداد اعضای $A$ یا $B$ (حداقل یکی) را بخواهیم: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ | | |
| **تعداد اعضایی که در هیچ کدام نباشند** | $n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)$ | | |
| **تعداد اعضایی که فقط در یکی باشند** | $n(A-B)+n(B-A)=n(A)+n(B)-2n(A\cap B)=n(A\cup B)-n(A\cap B)$ | | |

**3. اگر $n(A-B)=5-x$ و $n(B-A)=2x-7$ و $n(A\cap B)=x-2$ و $n(A)=n(B)$ باشد، $n(A\cap B)$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

**پاسخ: گزینه ۲** آسان | مفهومی، محاسباتی

با توجه به اطلاعات مسئله از نمودار وِن استفاده می‌کنیم.




$$n(A)=n(B) \Rightarrow 3x-9=3 \Rightarrow 3x=12 \rightarrow x=4$$

$$\Rightarrow n(A\cap B)=x-2=4-2=2$$

**4. اگر جملات سوم و هفتم و سیزدهم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب از راست به چپ برابر با $2x$ و $3x+2$ و $8x-2$ باشد، جمله‌ی $a_{2x}$ کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۸

**پاسخ: گزینه ۳** آسان | محاسباتی

در دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی عمومی $a_n$ داریم: $a_n-a_m=(n-m)d$

پس برای $a_3, a_7, a_{13}$:

$$\begin{cases} a_7-a_3=(7-3)d=4d \\ a_{13}-a_7=(13-7)d=6d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3x+2)-2x=4d \\ (8x-2)-(3x+2)=6d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2=4d \\ 5x-4=6d \end{cases}$$

با تقسیم طرفین تساوی فوق برهم خواهیم داشت:

$$\frac{x+2}{5x-4}=\frac{2}{3}\Rightarrow 3x+6=10x-8\rightarrow 7x=14\ ,\ x=2$$

$$\xrightarrow{x+2=4d} 4=4d\ ,\ d=1$$

$$a_{2x}=a_4=a_3+d=2x+d=2(2)+1=5$$

**5. بین دو عدد ۱۵ و ۶۹، هشت واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم به گونه‌ای که ۱۰ جمله تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند. مجموع چهار جمله‌ی اول دنباله چند برابر مجموع چهار جمله‌ی دوم دنباله است؟**

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{2}$

**پاسخ: گزینه ۴** متوسط | محاسباتی

$$15,\underbrace{\square,\square,\square,\ldots,\square}_{\text{۸ جمله (واسطه‌ی حسابی)}},69$$

$$t_1=15$$

$$t_{10}=69\rightarrow t_1+9d=69\rightarrow 9d=54\rightarrow d=6$$

$$\frac{\text{مجموع ۴ جمله‌ی اول}}{\text{مجموع ۴ جمله‌ی دوم}}=\frac{t_1+t_2+t_3+t_4}{t_5+t_6+t_7+t_8}=\frac{4t_1+6d}{4t_1+22d}=\frac{2t_1+3d}{2t_1+11d}=\frac{30+18}{30+66}=\frac{48}{96}=\frac{1}{2}$$

**نکته**

**واسطه حسابی**

اگر $a, b, c$ سه جمله دنباله حسابی باشند، رابطه $2b=a+c$ برقرار است که $b$ را واسطه حسابی $a, c$ می‌نامیم.

درج $m$ واسطه: برای درج $m$ واسطه حسابی بین $a, b$، قدرنسبت را از رابطه $d=\frac{b-a}{m+1}$ محاسبه می‌کنیم.

**6. به ازای چند عدد صحیح و بزرگ‌تر از منفی یازده $m$، اشتراک دو بازه‌ی $A=[\frac{m}{2},+\infty)$ و $B=(-\infty,\frac{m^2+3m+2}{m+11})$ هیچ عدد صحیحی را شامل نمی‌شود؟**

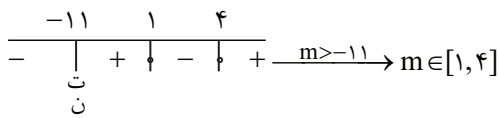
۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۷ ۴) ۵

**پاسخ: گزینه ۳** سخت | محاسباتی

سوال را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $A\cap B=\varnothing\rightarrow \frac{m^2+3m+2}{m+11}\le\frac{m}{2}$

$$\rightarrow \frac{2m^2+6m+4}{m+11}-m\le 0\rightarrow \frac{m^2-5m+4}{m+11}\le 0\rightarrow$$




$$\xrightarrow{m>-11} m\in[1,4]$$

حالت دوم: $A\cap B\neq\varnothing\rightarrow 0<\frac{m^2+3m+2}{m+11}-\frac{m}{2}\le 1$

کافیست قسمت $\frac{m^2+3m+2}{m+1}-\frac{m}{2}\le 1$ را محاسبه کنیم و سپس بازه جواب حالت اول را از آن کم کنیم:

$$\frac{۲m^۲+۶m+۴}{m+۱۱}-m-۲\le ۰ \rightarrow \frac{m^۲-۷m-۱۸}{m+۱۱}\le ۰ \rightarrow$$

| | −۱۱ | | −۲ | | ۹ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| − | ت ن | + | ۰ | − | ۰ | + |

پس مجموعه جواب نامعادله‌ی حالت دوم برابر است با: $m\in[-۲,۱)\cup(۴,۹]$.

* و اما قسمت مهم در حل این سوال یعنی بررسی جواب‌ها:

تو حالت اول همشون قبولن! اما تو حالت دوم نه زیرا ما طول بازه اشتراک را بین صفر و یک قرار دادیم که این به تنهایی کافی نیست زیر بازه‌ای مثل $(-\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})$ با این‌که طول کوتاه‌تر از ۱ واحد دارد اما عدد صفر را شامل می‌شود.

$$[\frac{m}{۲},\frac{m^۲+۳m+۲}{m+۱۱})$$

مشخص است اعداد زوج در حالت دوم همگی غیرقابل‌قبول هستند ولی برای اعداد فرد:

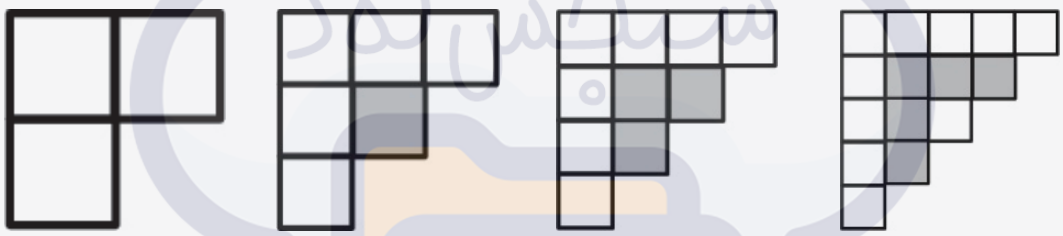
$m=-۱\rightarrow[-\frac{۱}{۲},۰)$ ✓

$m=۵\rightarrow[\frac{۵}{۲},\frac{۲۱}{۸})$ ✓

$m=۷\rightarrow[\frac{۷}{۲},۴)$ ✓ بنابراین: $m=-۱,۱,۲,۳,۴,۵,۷$ (۷ عدد صحیح)

$m=۹\rightarrow[\frac{۹}{۲},\frac{۱۱}{۲})$ ✗

**7. با توجه به الگوی داده شده نسبت مربع‌های سفید به رنگی در شکل بیستم کدام است؟**



۱) $\frac{۱۹۴}{۳۹}$ ۲) $\frac{۱۹۴}{۳۷}$ ۳) $\frac{۱۹۳}{۳۷}$ ۴) $\frac{۱۹۳}{۳۹}$

**پاسخ: گزینه ۲** متوسط | مفهومی

ابتدا جملهٔ عمومی مربوط به دنبالهٔ تعداد کل مربع‌ها را می‌نویسیم:

۳ , ۶ , ۱۰ , ۱۵ , ...

+۳ +۴ +۵

+۱ +۱

این دنباله، یک دنباله درجه دوم (دنباله مثلثی) با جمله اول ۳ است.

دنباله مثلثی: $t_n=\frac{n(n+۱)}{۲}\xrightarrow[t_۱=۳]{n\rightarrow n+۱} t_n=\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}$

پس جملهٔ عمومی دنبالهٔ تعداد کل مربع‌ها به صورت $t_n=\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}$ است. در نتیجه تعداد کل مربع‌ها در شکل بیستم برابر است با:

$$t_{۲۰}=\frac{۲۱\times۲۲}{۲}=۲۳۱$$

حالا باید جملهٔ عمومی دنبالهٔ مربوط به تعداد مربع‌های رنگی را بنویسیم:

۰ , ۱ , ۳ , ۵ , ...

+۲ +۲

واضح است که از جملهٔ دوم به بعد یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n=۲n-۱$ داریم و برای بدست آوردن تعداد مربع‌های رنگی در شکل

بیستم، کافیست $n=19$ را در این دنباله قرار می‌دهیم: $a_{19}=2(19)-1=37$

پس تعداد مربع‌های سفید در شکل بیستم برابر است با: $231-37=194$

$$\Rightarrow \frac{\text{تعداد مربع‌های سفید در شکل بیستم}}{\text{تعداد مربع‌های رنگی در شکل بیستم}}=\frac{194}{37}$$

**8. در دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی عمومی $a_n$ و قدرنسبت $r$، اگر $a_1=3+r$ و $a_8=a_6+72a_4$ باشد، جمله‌ی اول کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

**پاسخ: گزینه ۳** متوسط | محاسباتی

با توجه به تساوی $a_8=a_6+72a_4$ داریم:

$$a_8-a_6-72a_4=0 \Rightarrow a_1r^7-a_1r^5-72a_1r^3=0 \Rightarrow a_1r^3(r^4-r^2-72)=0$$

$$\xrightarrow[r\neq 0]{a_1\neq 0} r^4-r^2-72=0 \Rightarrow (r^2-9)(r^2+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} r^2=9 \Rightarrow r=\pm 3 \\ r^2=-8 \Rightarrow \text{فاقد ریشه‌ی حقیقی} \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم $a_1=3+r$ است، پس:

$r=3 \Rightarrow a_1=3+3=6$ ✓

$r=-3 \Rightarrow a_1=3-3=0$ ×

می‌دانیم همواره در دنبالهٔ هندسی $a_1\neq 0$ است، پس $a_1=0$ غیرقابل‌قبول است.

**9. اعضای مجموعه‌ی $\{2,4,a\}$ سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی با جملات مثبت هستند. حاصل‌ضرب مقادیر مختلف برای $a$ کدام است؟**

۱) ۸ ۲) $16\sqrt{2}$ ۳) $8\sqrt{2}$ ۴) ۱۶

**پاسخ: گزینه ۲** متوسط | محاسباتی

سه حالت داریم:

الف) $a \overset{\times 2}{,} 2 \overset{\times 2}{,} 4 \Rightarrow a=1$

ب) $2 \overset{\times\sqrt{2}}{,} a \overset{\times\sqrt{2}}{,} 4 \Rightarrow a=2\sqrt{2}$

پ) $2 \overset{\times 2}{,} 4 \overset{\times 2}{,} a \Rightarrow a=8$

بنابراین حاصل‌ضرب مقادیر $a$ برابر با $16\sqrt{2}$ است.

**10. جملات اول و سوم و چهارم یک دنباله‌ی هندسی غیرثابت با جملات مثبت تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. قدرنسبت دنباله‌ی حسابی به جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی کدام است؟**

۱) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ۳) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ۴) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

**پاسخ: گزینه ۲** سخت | محاسباتی

دنباله‌ی هندسی به صورت روبه‌رو خواهد بود: $a, aq^2, aq^3$

$$a+aq^3=2aq^2 \rightarrow q^3-2q^2+1=0 \rightarrow (q-1)(q^2-q-1)=0 \rightarrow q=\begin{cases} 1 \rightarrow \text{غیر ثابت} & \times \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \checkmark \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \rightarrow \text{جملات منفی می‌شود.} & \times \end{cases}$$

خواسته سوال: $\frac{d}{a}=\frac{aq^2-a}{a}=q^2-1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}-1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

**1. چه تعداد از متغیرهای زیر کیفی نیست؟**

**الف) وضعیت تأهل افراد** **ب) مقاومت یک سیم** **پ) نوع تلفن مورد استفاده**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

**پاسخ: گزینه ۱** آسان | حفظی

مقاومت یک سیم قابل اندازه‌گیری است و هر عددی می‌تواند باشد، پس کمی پیوسته است. اما وضعیت تأهل افراد و نوع تلفن مورد استفاده قابل اندازه‌گیری نیستند و متغیر کیفی محسوب می‌شوند. بنابراین فقط (ب) کیفی نیست.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **انواع متغیر** | کمی | متغیری که قابل اندازه‌گیری باشد ( با عدد قابل بیان است) | پیوسته | اگر $a$ و $b$ را اختیار کند هر عددی بین آن‌ها را می‌تواند بگیرد. |
| | | | | قد ، وزن ، حجم ، مساحت |
| | | | گسسته | پیوسته نیست ( نمی‌تواند هر عددی را اختیار کند) |
| | | | | تعداد نفرات ، نمره ، درصد کنکور |
| | کیفی | متغیری که قابل اندازه‌گیری نباشد | ترتیبی | نوعی ترتیب ذاتی در خود دارند |
| | | | | رتبه‌بندی ، مراحل تحصیلی |
| | | | اسمی | ترتیب ندارد.(سلیقه‌ای است) |
| | | | | رنگ پوست ، گروه خونی |

**2. میانگین داده‌های $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{17}$ برابر ۷ است. اگر میانگین داده‌های شمارهٔ فرد برای ۵ باشد، میانگین داده‌های شمارهٔ زوج کدام است؟**

۱) ۸/۸ ۲) ۹/۲۵ ۳) ۹/۵ ۴) ۱۰

**پاسخ: گزینه ۲** آسان | محاسباتی

چون میانگین ۹ دادهٔ $x_1, x_3, \ldots, x_{17}$ برابر ۵ است، پس مجموع آن‌ها برابر $۹\times۵=۴۵$ است، بنابراین:

$$\frac{\overbrace{x_1+x_3+\ldots+x_{17}}^{۴۵}+x_2+x_4+\ldots+x_{16}}{17}=۷$$

$$\Rightarrow x_2+x_4+\ldots+x_{16}=۷۴ \Rightarrow \overline{x}=\frac{x_2+x_4+\ldots+x_{16}}{8}=\frac{۷۴}{8}=۹/۲۵$$

**3. مقادیر اختلاف تعدادی دادهٔ آماری از میانگین آن‌ها به صورت زیر است. مقدار $x$ چقدر است؟**

**اختلاف داده‌ها از میانگین: $-۴,-۴,-۲,-۲,-۲,-۱,-۱,x,x,x,۵,۵$**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۲** آسان | محاسباتی

برای هر مجموعه‌ای از داده‌ها، مجموع اختلاف همهٔ داده‌ها از میانگین برابر صفر است. پس:

$$۲\times(-۴)+۳\times(-۲)+۲\times(-۱)+۳x+۲\times(۵)=۰ \Rightarrow ۳x=۶ \Rightarrow x=۲$$

**4. میانگین داده‌های $۳,x,y,۹,z$ برابر ۷ است. اگر داده‌های $۲z+۳$، $۲y+۵$ و $۲x-۱$ به این داده‌ها اضافه شود، میانگین داده‌های جدید کدام است؟**

۱) ۸ ۲) ۹/۵ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

**پاسخ: گزینه ۳** آسان | محاسباتی

ابتدا میانگین داده‌های اولیه را می‌نویسیم و سپس میانگین داده‌های جدید را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{۳+x+y+z+۹}{۵}=۷ \Rightarrow x+y+z=۷\times۵-۱۲=۲۳$$

$$\Rightarrow \bar{x}_{new}=\frac{۳+x+y+z+۹+(۲x-۱+۲y+۵+۲z+۳)}{۸}$$

$$=\frac{۳\overbrace{(x+y+z)}^{۲۳}+۱۹}{۸}=\frac{۸۸}{۸}=۱۱$$

**5. میانهٔ تعدادی داده آماری برابر ۳/۵ است. مجموع میانگین داده‌های کوچک‌تر از میانه و میانگین داده‌های بزرگ‌تر از میانه برابر ۷ است. اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، میانگین داده‌ها کدام است؟**

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

**پاسخ: گزینه ۲** متوسط | محاسباتی

فرض می‌کنیم میانگین $n$ دادهٔ کوچک‌تر از میانه برابر $\bar{x}$ و میانگین $n$ دادهٔ بزرگ‌تر از میانه برابر $\bar{y}$ باشد. با توجه به صورت سوال $\bar{x}+\bar{y}=۷$ است:

$$\underbrace{۰,۰...۰,۰}_{n\text{داده با میانگین }\bar{x}},۳/۵,\underbrace{۰,۰...۰,۰}_{n\text{داده با میانگین }\bar{y}}$$

پس میانگین کل داده‌ها برابر است با:

$$\frac{n\bar{x}+n\bar{y}+۳/۵}{۲n+۱}=\frac{n(\bar{x}+\bar{y})+۳/۵}{۲n+۱}=\frac{۷n+۳/۵}{۲n+۱}=\frac{۳/۵(۲n+۱)}{۲n+۱}=۳/۵$$

**راه دوم:** تعداد کل داده‌ها را ۳ تا در نظر می‌گیریم و سوال را در حالت خاص حل می‌کنیم:

$$\text{داده‌ها}: a,۳/۵,b \xrightarrow{a+b=۷} \bar{x}=\frac{a+b+۳/۵}{۳}=\frac{۷+۳/۵}{۳}=\frac{۱۰/۵}{۳}=۳/۵$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| **میانه** | تعریف | | برای محاسبه‌ی میانه اگر داده‌ها را به ترتیب از کم به زیاد مرتب کنیم ، داده وسط میانه است. |
| | | | میانه داده های ۱ و ۵ و ۹ و ۱۱و ۶۸ و ۱۲۵ و ۱۴۰۴ و ۲۰۰۰ عدد ۶۸ است. |
| | ردیف میانه | تعداد داده‌ها ... باشد | اگر $N$ زوج باشد میانگین داده $\left(\frac{N}{۲}\right)$ام و $\left(\frac{N}{۲}+۱\right)$ام میانه است. |
| | | | اگر $N$ فرد باشد میانه داده $\left(\frac{N+۱}{۲}\right)$ ام است. |
| | | | اگر ۹ داده داشته باشیم داده ۵ ام میانه است واگر ۱۲ داده داشته باشیم میانه ما ، میانگین داده ۶ ام و ۷ ام است. |

**6. نمرات درس زیست‌شناسی دانش‌آموزی در ۱۰ آزمون به صورت ۱۱، ۲۰، ۱۵، ۱۶، ۱۵، ۱۴، ۹، ۱۵، ۱۲، ۱۴ می‌باشد. با حذف دو نمرهٔ کم‌ترین و بیشترین آن‌ها، مقدار انحراف معیار تقریباً کدام است؟**

۱) ۰/۹ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۴ ۴) ۱/۶

**پاسخ: گزینه ۴** متوسط | محاسباتی

کم‌ترین و بیشترین نمرهٔ این دانش‌آموز به ترتیب ۹ و ۲۰ است که با حذف آن‌ها باید انحراف معیار داده‌های ۱۶ و۱۵ و ۱۵ و ۱۵ و ۱۴ و ۱۴ و ۱۲ و ۱۱ را به دست آوریم:

$$۱)\ \bar{x}=\frac{۱۱+۱۲+۲\times۱۴+۳\times۱۵+۱۶}{۸}=\frac{۱۱۲}{۸}=۱۴$$

$$۲)\ \sigma^۲=\frac{(۱۱-۱۴)^۲+(۱۲-۱۴)^۲+۲\times(۱۴-۱۴)^۲+۳\times(۱۵-۱۴)^۲+(۱۶-۱۴)^۲}{۹}$$

$$\Rightarrow \sigma^۲=\frac{\overbrace{۹+۴+۰+۳+۴}^{۲۰}}{۸}=۲/۵ \Rightarrow \sigma=\sqrt{۲/۵}\simeq ۱/۶$$

**7. اعداد طبیعی زوج را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد. یعنی ...,{۸,۱۰,۱۲},{۴,۶},{۲}، در این صورت واریانس جملات دستهٔ هفتم کدام است؟**

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

**پاسخ: گزینه ۳** متوسط | محاسباتی

در دستهٔ هفتم، ۷ عدد طبیعی زوج داریم که یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۲ تشکیل داده‌اند. پس واریانس آن‌ها برابر است با:

$$\sigma^۲=\frac{n^۲-۱}{۱۲}\times d^۲ \Rightarrow \sigma^۲=\frac{۷^۲-۱}{۱۲}\times ۴=\frac{۴۸}{۳}=۱۶$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| **واریانس** | دنباله حسابی | | اگر $n$ جمله دنباله حسابی با قدر نسبت $d$ را داشته باشیم: $\sigma^۲=\left(\frac{n^۲-۱}{۱۲}\right)d^۲$ |
| | | | واریانس داده های ۱و۳و۵و۷و۹ برابر است با: $\sigma^۲=\left(\frac{n^۲-۱}{۱۲}\right)d^۲=\left(\frac{۵^۲-۱}{۱۲}\right)۲^۲=۸$ |

**8. در ۱۷ دادهٔ آماری، میانگین داده‌های قبل از چارک اول برابر میانگین داده‌های بعد از چارک سوم است. اگر داده‌های ۲۵، ۱۲، ۸ به آن‌ها اضافه شود، میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند. واریانس داده‌های جدید کدام است؟**

۱) ۷/۳ ۲) ۷/۹ ۳) ۸/۱ ۴) ۸/۴

**پاسخ: گزینه ۲** متوسط | محاسباتی

چون میانگین داده‌های قبل از چارک اول برابر میانگین داده‌های بعد از چارک سوم است، پس همهٔ داده‌ها با یک‌دیگر برابر هستند. حال اگر همهٔ داده‌ها را a در نظر بگیریم، چون با اضافه شدن سه دادهٔ ۱۵، ۱۲، ۸ میانگین تغییر نمی‌کند، پس:

$$a=\frac{۸+۱۲+۲۵}{۳}=۱۵$$

بنابراین واریانس ۲۰ دادهٔ جدید برابر است با:

$$\sigma^{۲}_{new}=\frac{۱۷\times(۱۵-۱۵)^{۲}+(۸-۱۵)^{۲}+(۱۲-۱۵)^{۲}+(۲۵-۱۵)^{۲}}{۲۰}$$

$$\Rightarrow \sigma^{۲}_{new}=\frac{۰+۴۹+۹+۱۰۰}{۲۰}=\frac{۱۵۸}{۲۰}=۷/۹$$

| | | |
|---|---|---|
| **واریانس** | نماد واریانس $\sigma^{۲}$ (سیگمادو) است و برای محاسبه آن بسته به داده سوال سه روش داریم: | |
| | روش کلی | اگر $n$ تعداد داده ها و $\bar{X}$ میانگین داده های $x_i$ باشد، واریانس برابر است با: $\sigma^{۲}=\frac{\sum(x_i-\bar{X})^{۲}}{n}$ |
| | | واریانس داده های ۱ و ۲ و ۱۲ برابر است با : $\sigma^{۲}=\frac{\sum(x_i-\bar{X})^{۲}}{n}=\frac{(۱-۵)^{۲}+(۲-۵)^{۲}+(۱۲-۵)^{۲}}{۳}=\frac{۷۴}{۳}$ |

**9. میانگین سه دادهٔ $x_۳$ ، $x_۲$ ، $x_۱$ برابر ۵ است. اگر دادهٔ ۱ را به آن‌ها اضافه کنیم، ضریب تغییرات چهار دادهٔ جدید ۲/۵ برابر ضریب تغییرات داده‌های اولیه می‌شود. واریانس داده‌های جدید چند برابر واریانس داده‌های اولیه است؟**

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۴** متوسط | محاسباتی

میانگین سه دادهٔ اولیه برابر ۵ است، پس:

$$\frac{x_۱+x_۲+x_۳}{۳}=۵ \Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳=۱۵$$

$$\Rightarrow \bar{x}_{new}=\frac{x_۱+x_۲+x_۳+۱}{۴}=\frac{۱۵+۱}{۴}=۴$$

از طرفی با توجه به صورت سوال داریم:

$$CV_{new}=۲/۵CV_{old} \Rightarrow \frac{\sigma_{new}}{۴}=۲/۵\frac{\sigma_{old}}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{new}}{\sigma_{old}}=۲ \Rightarrow \frac{\sigma^{۲}_{new}}{\sigma^{۲}_{old}}=۴$$

**10. در یک شرکت طراحی داخلی، دو گروه از کارآموزان مشغول‌اند. گروه A مسئول اندازه‌گیری طول و عرض اتاق‌ها است و گروه B مسئول اندازه‌گیری ارتفاع سقف‌هاست. مدیر پروژه می‌خواهد بداند کدام گروه دقت کاری بیشتری دارد. برای همین از هر گروه می‌خواهد چندین بار یک اتاق مشخص را اندازه‌گیری کنند. اعداد حاصل به صورت مقابل است. دقت عمل کدام گروه بیشتر است؟**

**A: ۲۲,۲۳,۲۴,۲۷,۲۹**

**B: ۲۱,۲۴,۲۵,۲۷,۲۸**

۱) A ۲) B ۳) یکسان ۴) غیرقابل بررسی

**پاسخ: گزینه ۲** متوسط | محاسباتی

ابتدا میانگین امتیازات هر گروه را تعیین می‌کنیم:

$$\overline{x}_A = \frac{۲۲+۲۳+۲۴+۲۷+۲۹}{۵} = \frac{۱۲۵}{۵} = ۲۵$$

$$\overline{x}_B = \frac{۲۱+۲۴+۲۵+۲۷+۲۸}{۵} = \frac{۱۲۵}{۵} = ۲۵$$

میانگین امتیازات برابر است، بنابراین برای مقایسهٔ دقت عمل آن‌ها ضریب تغییرات نمرات را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\sigma_A^۲ = \frac{(۲۲-۲۵)^۲ + (۲۳-۲۵)^۲ + (۲۴-۲۵)^۲ + (۲۷-۲۵)^۲ + (۲۹-۲۵)^۲}{۵} = \frac{۳۴}{۵}$$

$$\sigma_B^۲ = \frac{(۲۱-۲۵)^۲ + (۲۴-۲۵)^۲ + (۲۵-۲۵)^۲ + (۲۷-۲۵)^۲ + (۲۸-۲۵)^۲}{۵} = \frac{۳۰}{۵}$$

چون $\sigma_A^۲ > \sigma_B^۲$ است، نتیجه می‌شود $CV_A > CV_B$. بنابراین دقت عمل گروه B بیشتر است.

**1. ابتدا قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۴,-۱)$ را نسبت به نقطه‌ی $M(۲,۳)$ به دست آورده و آن را $A_۱$ می‌نامیم. قرینه‌ی نقطه‌ی $A$ نسبت به مبدأ مختصات را نیز $A_۲$ می‌نامیم. طول پاره‌خط $A_۱A_۲$ کدام است؟**

۱) $\sqrt{۱۳}$ ۲) $۲\sqrt{۱۳}$ ۳) $۳\sqrt{۱۳}$ ۴) $۴\sqrt{۱۳}$

**پاسخ: گزینه ۲** ساده - محاسباتی | هندسه تحلیلی

ابتدا مختصات نقاط $A_۱$ را به دست می‌آوریم:

$$x_{A_۱}=۲x_M-x_A \Rightarrow x_{A_۱}=۲(۲)-۴ \Rightarrow x_{A_۱}=۰$$
$$y_{A_۱}=۲y_M-y_A \Rightarrow y_{A_۱}=۲(۳)-(-۱) \Rightarrow y_{A_۱}=۷$$

بنابراین مختصات نقطه‌ی $A_۱$ به صورت $A_۱(۰,۷)$ است.

نقطه‌ی $A_۲$ قرینه‌ی نقطه‌ی $A$ نسبت به مبدأ مختصات است، پس مختصات آن به صورت $A_۲(-۴,۱)$ است. اکنون فاصله‌ی $A_۱A_۲$ را حساب می‌کنیم:

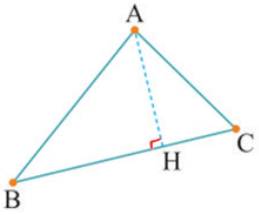
$$A_۱A_۲=\sqrt{(x_{A_۱}-x_{A_۲})^۲+(y_{A_۱}-y_{A_۲})^۲}=\sqrt{۴^۲+۶^۲}=\sqrt{۵۲}=۲\sqrt{۱۳}$$

**2. اگر رئوس مثلث $ABC$ به صورت $A(۱,۹)$، $B(۳,۳)$ و $C(۷,۱۱)$ باشند، طول ارتفاع $AH$ کدام است؟**

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

**پاسخ: گزینه ۱** متوسط - محاسباتی | هندسه تحلیلی

با توجه به شکل زیر، طول $AH$، همان فاصله‌ی نقطه‌ی $A$ از ضلع $BC$ است. برای محاسبه‌ی $AH$، نیاز به معادله خط $BC$ داریم، پس ابتدا معادله‌ی این خط را به دست می‌آوریم:




$$m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{۳-۱۱}{۳-۷}=\frac{۸}{۴}=۲$$
$$y-y_B=m_{BC}(x-x_B) \Rightarrow y-۳=۲(x-۳) \Rightarrow ۲x-y-۳=۰$$

اکنون مقدار $AH$ را به کمک رابطه فاصله‌ی نقطه از خط به دست می‌آوریم:

$$AH=\frac{|۲(۱)-(۹)-۳|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}$$

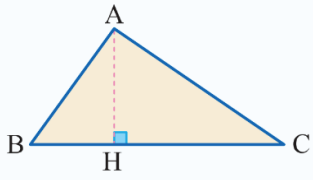
**ارتفاع**

**تعریف:** خطی است که از راس بر ضلع مقابل عمود میشود.

**طول ارتفاع AH:** فاصله نقطه $A$ از خط $BC$ است.

**معادله ارتفاع AH:** با داشتن مختصات $A$ و عکس و قرینه شیب خط $BC$ می‌توان معادله خط را نوشت:

$$y-y_A=\frac{-۱}{m_{BC}}(x-x_A)$$




**3. نقاط $A(-۲,۳)$، $B(۲,۰)$ و $C(۵,۴)$ رئوس یک مثلث‌اند. نوع مثلث $ABC$ کدام است؟**

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الساقین ۳) متساوی‌الاضلاع ۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

**پاسخ: گزینه ۴** ساده - مفهومی | هندسه تحلیلی

طول هر سه پاره‌خط $AC, BC$ و $AB$ را به دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$$
$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$
$$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$$

**روش اول:** با توجه به طول اضلاع، بین آن‌ها رابطه‌ی فیثاغورس برقرار است، یعنی:

$$(AB)^2+(BC)^2=(AC)^2 \Rightarrow (5)^2+(5)^2=(5\sqrt{2})^2$$

پس این مثلث قائم‌الزاویه و چون طول دو ضلع با هم برابر است، متساوی‌الساقین نیز هست.

**روش دوم:** اگر شیب پاره‌خط $AB$ و $BC$ را محاسبه کنیم، داریم:

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{4-0}{5-2}=\frac{4}{3}$$

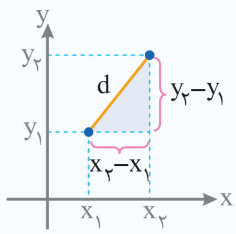
$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-3}{2-(-2)}=\frac{-3}{4}$$

از آن‌جایی که $m_{AB}\times m_{BC}=-1$ است. پس خطوط $AB$ و $BC$ برهم عمودند و این مثلث قائم‌الزاویه است و با توجه به برابر بودن دو ضلع، متساوی‌الساقین نیز خواهد بود.

**فاصله دو نقطه**

اگر مختصات نقطه $A(x_1,y_1)$ و نقطه $B(x_2,y_2)$ باشد. فاصله آنها مطابق شکل با کمک رابطه فیثاغورس برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$




**کاربرد**

یکی از کاربرد های این فرمول تعیین نوع مثلث با داشتن سه نقطه است.

۱- اگر طول دو ضلع باهم برابر بود مثلث متساوی الساقین است. اضلاع $a,a,b$ است.

۲- اگر طول سه ضلع باهم برابر بود مثلث متساوی الاضلاع است. اضلاع $a,a,a$ است.

۳- اگر اضلاع در رابطه فیثاغورس صدق کند مثلث قائم الزاویه است. اضلاع $a,b,\sqrt{a^2+b^2}$ است.

۴- ممکن است مثلث متساوی الساقین و قائم الزاویه باشد. اضلاع $a,a,a\sqrt{2}$ است.

**مثال:** اگر نقطه $A(-1,0)$ و $B(3,5)$ و $C(4,-4)$ سه راس مثلث باشند نوع مثلث را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} AB=\sqrt{(-1-3)^2+(0-5)^2}=\sqrt{41} \\ AC=\sqrt{(-1-4)^2+(0+4)^2}=\sqrt{41} \\ CB==\sqrt{(4-3)^2+(-4-5)^2}=\sqrt{82} \end{cases} \Rightarrow \text{متساوی الساقین و قائم الزاویه}$$

**4. مساحت ناحیهٔ محدود بین دو خط $x-2y-4=0$ و $3x-2y-18=0$ در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات کدام است؟**

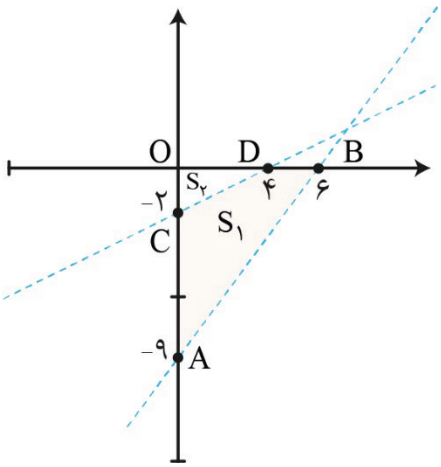
۱) ۲۳ ۲) ۲۷ ۳) ۴۰ ۴) ۲۰

**پاسخ: گزینه ۱** متوسط - محاسباتی | هندسه تحلیلی

ابتدا دو خط را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و محل برخورد هر خط با محور طول و عرض را مشخص می‌کنیم:

$$1)\ 2y=x-4 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x-2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-2 \\ y=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

$$2)\ 2y=3x-18 \Rightarrow y=\frac{3}{2}x-9 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-9 \\ y=0 \Rightarrow x=6 \end{cases}$$




برای بدست آوردن مساحت ناحیه رنگی مساحت مثلث OCD را از مساحت مثلث OAB کم می‌کنیم.

$$S_{OAB} = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 9 \times 6 = 27 \Rightarrow S_1 = 27 - 4 = 23$$

$$S_{OCD} = S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

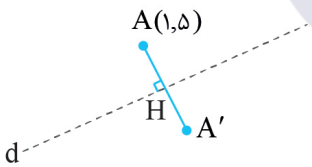
**5. خط d محورهای مختصات را در دو نقطهٔ (۰,۳) و (۴,۰-) قطع می‌کند. قرینهٔ نقطهٔ A(۱,۵) نسبت به خط d کدام است؟**

۱) (۲ / ۲,۳)　　۲) (۲,۳ / ۴)　　۳) (۲ / ۲,۳ / ۴)　　۴) (۲,۲ / ۲)

**پاسخ: گزینه ۳** متوسط - محاسباتی | هندسه تحلیلی

معادله‌ی خط d: $y = \frac{3}{4}x + 3$ ← شیب خط d $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{0 + 4} = \frac{3}{4}$

اگر دو خط بر هم عمود باشند شیب‌هایشان قرینه و معکوس هم می‌باشد پس شیب خط $AA'$ برابر $-\frac{4}{3}$ است و معادله خط آن برابر است با:




معادله خط $AA'$: $y - 5 = -\frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{19}{3}$

نقطه‌ی تلاقی خط d و $AA'$ را به دست می‌آوریم.

$$(-\frac{4}{3}x + \frac{19}{3} = \frac{3}{4}x + 3) \xrightarrow{\times 12} -16x + 76 = 9x + 36 \Rightarrow 25x = 40 \rightarrow x = \frac{40}{25} = \frac{8}{5},\ y = \frac{21}{5}$$

پس مختصات $H = (\frac{8}{5}, \frac{21}{5})$ است باتوجه به اینکه H وسط $AA'$ است پس: $\frac{A + A'}{2} = H$ یا $A' = 2H - A$ پس:

$$A' = 2H - A = (2 \times \frac{8}{5} - 1,2 \times \frac{21}{5} - 5) = (2 / 2,3 / 4)$$

| | |
|---|---|
| قرینه نسبت به خط $ax + by + c = 0$ برای پیدا کردن قرینه نقطه نسبت به خط ۲ راه داریم: | ۱ ابتدا معادله‌ی خطی را که از A عمود بر I می‌گذرد را بنویسید و سپس نقطهٔ تلاقی دو خط را M بنامید. حالا $A'$ را که برابر است با قرینه نقطه A نسبت به M به دست آورید.<br>این نقطه قرینه‌ی A نسبت به خط I نیز است. |
| | ۲ اگر $A(a,b)$ و معادله‌ی خط $ax + by + c = 0$ باشد داریم: $S = \frac{aa + bb + c}{a^2 + b^2}$ و قرینه برابر است با:<br>$A'(a - 2as, b - 2as)$ |

**6.** نقطهٔ $A(۲,۳)$ را نسبت به خط $y=۲$ و نقطهٔ $B(۳,-۱)$ را نسبت به خط $x=۳$ قرینه می‌کنیم تا به ترتیب نقاط $A'$ و $B'$ به دست آیند. سپس نقطهٔ $C(۴,-۱)$ را نسبت به نقطهٔ $P(۲,-۱)$ قرینه می‌کنیم تا به نقطهٔ $C'$ برسیم. مساحت مثلث $A'B'C'$ کدام است؟

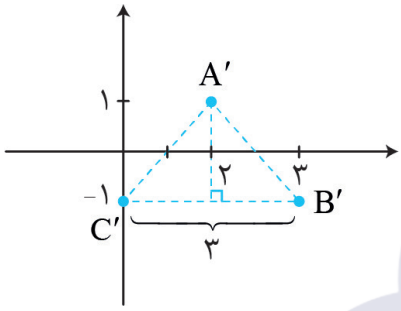
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۵

**پاسخ: گزینه ۲** سخت - محاسباتی | هندسه تحلیلی

**نکته** قرینه نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت به خط $y=b$ برابر است با: $A':(x,۲b-y)$

قرینه نقطهٔ $A'(x,y)$ نسبت به خط $x=m$ برابر است با: $A':(۲m-x,y)$

قرینه نقطه $A\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ نسبت به نقطه $O\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$ برابر است با $A':\begin{vmatrix}۲\alpha-x\\۲\beta-y\end{vmatrix}$ با استفاده از نکات گفته شده مختصات نقاط $A'$، $B'$، $C'$ را بدست می‌آوریم و مثلث $A'B'C'$ را رسم می‌کنیم.




$$A'(۲,۲\times۲-۳)\to A'(۲,۱)$$
$$B'(۲\times۳-۳,-۱)\to B'(۳,-۱)$$
$$C'(۲\times۲-۴,۲(-۱)-(-۱))\to C'(۰,-۱)$$
$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times۳\times۲=۳$$

**7.** دو ضلع مقابل به هم یک مستطیل روی خطوط به معادله $y-ax=۱$ و $ay-x=a-۱$ واقع هستند. اگر قطر مستطیل برابر ۵ و نقطه $(۱,۲)$ یک رأس از مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

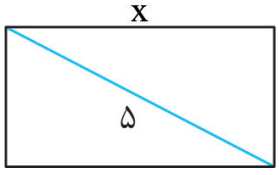
۱) ۲/۵ ۲) ۳/۵ ۳) $\sqrt{۴۶}$ ۴) $۲\sqrt{۳۴}$

**پاسخ: گزینه ۲** ساده - محاسباتی | هندسه تحلیلی

چون دو ضلع موازی‌اند، پس $a=۱$ است و معادلهٔ اضلاع مستطیل $y=x+۱$ و $y=x$ هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$d=\frac{|۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

یعنی عرض مستطیل برابر $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ و قطر آن ۵ است، پس طبق رابطهٔ فیثاغورس، طول مستطیل برابر است با:




$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\Rightarrow x^۲=۵^۲-(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲=\frac{۴۹}{۲}\Rightarrow x=\frac{۷}{\sqrt{۲}}$$

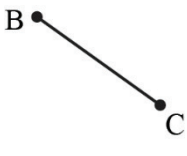
بنابراین مساحت مستطیل برابر $S=\frac{۷}{\sqrt{۲}}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{۷}{۲}=۳/۵$ است.

**8.** اگر $B(۱,۳)$ و $C(۵,-۱)$ دو رأس مثلث متساوی‌الساقین $ABC$ به رأس $A$ باشند و طول هر ساق $\sqrt{۴۰}$ باشد مجموع طول و عرض نقطه $A$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $-۴$ ۲) ۴ ۳) ۱۳ ۴) $-۱۲$

**پاسخ: گزینه ۱** متوسط - محاسباتی | ترسیم هندسی

چون مثلث $ABC$ متساوی‌الساقین است پس ابتدا معادله عمودمنصف $BC$ را می‌نویسیم چون نقطه $A$ روی عمودمنصف $BC$ قرار می‌گیرد مختصات $D$ وسط $BC$ را می‌یابیم.



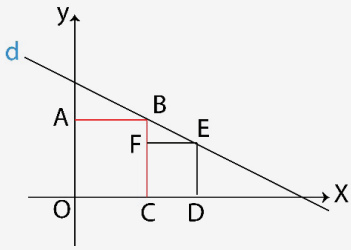

$$D(\frac{x_B+x_C}{۲},\frac{y_B+y_C}{۲})=(۳,۱)$$
$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-۱-۳}{۵-۱}=-۱\to m_{\text{عمودمنصف}}=\frac{-۱}{m_{BC}}=۱$$

معادله خط عمودمنصف به صورت $y-1=1(x-3)$ است $(y=x-2)$، پس نقطه A به صورت $(x,x-2)$ است.

$$AB=\sqrt{(x-1)^2+(x-5)^2}=\sqrt{40}\rightarrow 2x^2-12x+26=40\rightarrow x^2-6x-7=0\rightarrow\begin{cases}x=-1\\x=7\end{cases}$$

$$\rightarrow A(-1,-3)\text{ یا }A(7,5)\rightarrow \text{مجموع طول و عرض}=12\text{ یا }-4$$

**9. مطابق شکل، دو مربع در ناحیهٔ اول مختصات قرار گرفته‌اند و رأس B و E روی خط d به معادلهٔ $x+2y-18=0$ قرار دارد. فاصلهٔ رأس E از مبدأ مختصات کدام است؟**




۱) $2\sqrt{29}$

۲) $6\sqrt{3}$

۳) ۱۰

۴) ۱۲/۵

**پاسخ: گزینه ۱** متوسط - نموداری | ترسیم هندسی

چون OABC مربع است، پس باتوجه به شکل، طول و عرض نقطهٔ B برابر است، پس آن را به صورت $B(a,a)$ فرض می‌کنیم. حالا چون نقطهٔ B روی خط $x+2y-18=0$ قرار دارد، پس در آن صدق می‌کند:

$$a+2a-18=0\Rightarrow a=6$$

حالا اگر ضلع مربع CDEF، را برابر b در نظر بگیریم، آن‌گاه $E(b+6,b)$ است. این نقطه نیز روی خط d قرار دارد، پس در آن صدق می‌کند:

$$(b+6)+2b-18=0\Rightarrow 3b=12\Rightarrow b=4$$

پس $E(10,4)$ است و فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با:

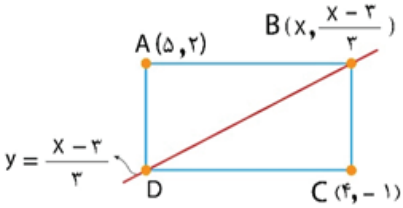
$$OE=\sqrt{(10-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{116}=2\sqrt{29}$$

**10. در یک مستطیل، نقاط $A(5,2)$ و $C(4,-1)$ دو رأس غیرمجاور و دو رأس B و D روی خط $x-3y=3$ واقع‌اند، محیط این مستطیل کدام است؟**

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $6\sqrt{2}$ ۳) $8\sqrt{2}$ ۴) $12\sqrt{2}$

**پاسخ: گزینه ۲** سخت / ترکیبی - محاسباتی | ترسیم هندسی و هندسه تحلیلی

باتوجه به صورت سؤال نقاط B و D روی خط $y=\frac{x-3}{3}$ قرار دارند. پس مختصات نقطهٔ B را به صورت $(x,\frac{x-3}{3})$ در نظر می‌گیریم. و شیب اضلاع AB و BC را به دست می‌آوریم:




$$m_{AB}=\frac{\frac{x-3}{3}-2}{x-5}=\frac{x-9}{3(x-5)}$$

$$m_{BC}=\frac{\frac{x-3}{3}-(-1)}{x-4}=\frac{x}{3(x-4)}$$

در ضمن می‌دانیم اضلاع AB و BC بر هم عمودند، پس:

$$m_{AB}\times m_{BC}=-1\Rightarrow\frac{x-9}{3(x-5)}\times\frac{x}{3(x-4)}=-1\Rightarrow x^2-9x=-9(x^2-9x+20)\Rightarrow 10x^2-90x+180=0$$

$$\Rightarrow x^2-9x+18=0\Rightarrow(x-3)(x-6)=0\Rightarrow\begin{cases}x_D=3\\x_B=6\end{cases}$$

پس $D(3,0)$ است و محیط مستطیل برابر است با:

$$2(AD+CD)=2\left(\sqrt{(5-3)^2+(2-0)^2}+\sqrt{(4-3)^2+(-1-0)^2}\right)=2(2\sqrt{2}+\sqrt{2})=6\sqrt{2}$$

# پاسخنامه ۲۴ بهمن ماه ۱۴۰۳

**1. با حروف کلمه‌ی (دانشجو) و بدون تکرار حروف چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که دو حرف (ج، و) کنار ه باشند و به حرف (ش) ختم نشود؟**

۱) ۷۲۰ ۲) ۶۷۲ ۳) ۴۸ ۴) ۲۴

**پاسخ: گزینه ۲**

!۶= کل کلمات ۶ حرفی

جابه جایی (ج و) با هم

بسته (ج و) و سه حرف دیگر

کلمات ۶ حرفی که (ج و) کنار هم باشند و به (ش) ختم می‌شود. $= \frac{\text{ش}}{۱} \_\_\_\_\_ = ۴! \times ۲!$

جواب مسئله $= ۶! - (۴! \times ۲!) = ۷۲۰ - ۴۸ = ۶۷۲$

**2. با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵ چند عدد ۳ رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت به طوری که میانگین ارقام با یکی از ارقام برابر باشد؟**

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

**پاسخ: گزینه ۲**

برای اینکه میانگین ارقام با یکی از ارقام برابر باشد باید ارقام، تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند، بنابراین حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

**حالت اول:** ارقام تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت $(d = ۱)$ بدهند:

رقم یکان عدد صفر باشد: $۰,۱,۲ \to \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underline{۱} \to ۲ \quad ۲ \times ۱ \times ۱ = ۲$

رقم یکان عدد ۲ باشد:

$۰,۱,۲ \to \underline{۱}\ \underline{۱}\ \underline{\underset{\text{عدد ۲}}{۱}} \to ۱ \times ۱ \times ۱ = ۱$

$۱,۳,۲ \to \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underline{\underset{\text{عدد ۲}}{۱}} \to ۲ \times ۱ \times ۱ = ۲$

$۴,۳,۲ \to \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underline{\underset{\text{عدد ۲}}{۱}} \to ۲ \times ۱ \times ۱ = ۲$

رقم یکان عدد ۴ باشد:

$۲,۳,۴ \to \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underline{\underset{\text{عدد ۴}}{۱}} \quad ۲ \times ۱ \times ۱ = ۲$

$۳,۵,۴ \to \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underline{\underset{\text{عدد ۲}}{۱}} \quad ۲ \times ۱ \times ۱ = ۲$

**حالت دوم:** ارقام تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت $(d = ۲)$ بدهند:

$d = ۲ \to ۰,۲,۴ \to$

- $\underline{۲}\ \underline{۱}\ \underline{\underset{\text{عدد ۰}}{۱}} \quad ۲ \times ۱ \times ۱ = ۲ \to$ یکان صفر باشد
- $\underline{۱}\ \underline{۱}\ \underline{۲} \quad ۱ \times ۱ \times ۲ = ۲ \to$ یکان صفر نباشد

تعداد اعداد $= ۲ + ۱ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ = ۱۵$

**3. با حروف کلمه‌ی «قفسه کتاب» و بدون تکرار حروف، نسبت تعداد کلمات ۸ حرفی که در آنها حروف "ق" و "ف" کنار هم باشند به تعداد کلمات ۶ حرفی که به "کتاب" ختم می‌شوند، برابر با کدام گزینه است؟**

۱) $۵\times۷!$ ۲) $۴\times۷!$ ۳) $۷\times۵!$ ۴) $۷\times۴!$

**پاسخ: گزینه ۳**

$۷!\times۲!\Rightarrow$ ب ا ت ک هـ س ق ف $\Rightarrow$ تعداد کلمات ۸ حرفی که در آنها حروف "ق" و "ف" کنار هم هستند.

$P(۴,۲)=\frac{۴!}{۲!}=۱۲\Rightarrow$ کتاب $\Rightarrow$ تعداد کلمات ۶ حرفی که به «کتاب» ختم می‌شوند.

$$\text{جواب مسئله}=\frac{۷!\times۲!}{۱۲}=\frac{۷!}{۶}=\frac{۷\times\cancel{۶}\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{\cancel{۶}}=۷\times۵!$$

**4. به $(m\times n!)$ طریق می‌توان ۷ کتاب متمایز را به ۴ نفر هدیه داد به طوری که هر نفر حداقل یک هدیه دریافت می‌کند، اختلاف بین بیشترین و کمترین مقدار $m+n$ کدام است؟ $(m,n\in N)$**

۱) ۷۵ ۲) ۴۱۲۷ ۳) ۲۷۹ ۴) ۸۳۲۶

**پاسخ: گزینه ۴**

برای این که هر نفر حداقل یک هدیه دریافت کند باید تعداد هدیه‌هایی که به افراد می‌رسد، به صورت زیر باشد:

**حالت ۱:** به یک نفر ۴ هدیه برسد.

$$\boxed{۴}\boxed{۱}\boxed{۱}\boxed{۱}\rightarrow\frac{۴!}{۳!}\times\binom{۷}{۴}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}=۴\times۳۵\times۳\times۲\times۱=۸۴۰$$

**حالت ۲:** به یک نفر ۳هدیه و به یک نفر ۲ هدیه برسد.

$$\boxed{۳}\boxed{۲}\boxed{۱}\boxed{۱}\rightarrow\frac{۴!}{۲!}\times\binom{۷}{۳}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}=۱۲\times۳۵\times۶\times۲\times۱=۵۰۴۰$$

**حالت ۳:** به ۳ نفر ۲ هدیه برسد.

$$\boxed{۲}\boxed{۲}\boxed{۲}\boxed{۱}\rightarrow\frac{۴!}{۳!}\times\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲}\binom{۱}{۱}=۴\times۲۱\times۱۰\times۳\times۱=۲۵۲۰$$

بنابراین تعداد کل حالت ها برابر است با:

$$۸۴۰+۵۰۴۰+۲۵۲۰=۸۴۰۰=۷۰\times۱۲۰=۷۰\times۵!=m\times n!$$

$$\rightarrow\begin{cases}۸۴۰۰=۷۰\times۵!\rightarrow m=۷۰,n=۵\rightarrow m+n=۷۵ & \min\\ ۸۴۰۰=۳۵۰\times۴!\rightarrow m=۳۵۰,n=۴\rightarrow m+n=۳۵۴\\ ۸۴۰۰=۱۴۰۰\times۳!\rightarrow m=۱۴۰۰,n=۳\rightarrow m+n=۱۴۰۳\\ ۸۴۰۰=۴۲۰۰\times۲!\rightarrow m=۴۲۰۰,n=۲\rightarrow m+n=۴۲۰۲\\ ۸۴۰۰=۸۴۰۰\times۱!\rightarrow m=۸۴۰۰,n=۱\rightarrow m+n=۸۴۰۱ & \max\end{cases}$$

اختلاف بیشترین و کمترین مقدار $m+n$ = ۸۳۲۶

**5. با حروف کلمه‌ی «دفترچه آموزش» چندکلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت به‌طوری که حروف نقطه‌دار و بدون نقطه به صورت یک‌در میان قرار داشته و شروع کلمه با حرف بدون نقطه باشد؟**

۱) $۵!\times۶!$ ۲) $\frac{۱}{۴}\times۵!\times۶!$ ۳) $\frac{۱}{۲}\times۵!\times۶!$ ۴) $۵!\times۶!\times۲!$

**پاسخ: گزینه ۲**

با توجه به اینکه در کلمه‌ی «دفترچه آموزش» ۵ حرف نقطه دارد و ۶ حرف بدون نقطه وجود دارد، بنابراین داریم:

| ۶ | ۵ | ۵ | ۴ | ۴ | ۳ | ۳ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| بدون‌نقطه | بانقطه | بدون‌نقطه | بانقطه | بدون‌نقطه | بانقطه | بدون‌نقطه |

تعداد کلمات ۷ حرفی $= (۶\times۵\times۵\times۴\times۴\times۳\times۳) = (۶\times۵\times۴\times۳)\times(۵\times۴\times۳)$

$= \left(۶\times۵\times۴\times۳\times\frac{۲}{۲}\right)\times\left(۵\times۴\times۳\times\frac{۲}{۲}\right) = \frac{۶!}{۲}\times\frac{۵!}{۲} = \frac{۱}{۴}\times۶!\times۵!$

**6. تاسی را ۶ بار پرتاب می‌کنیم، چند عدد ۶ رقمی می‌توان ساخت که یک عدد یک بار، عدد دیگری دو بار و یک عدد دیگر سه بار تکرار شوند؟**

۱) ۵۰ ۲) ۹۰ ۳) ۸۰۰۰ ۴) ۷۲۰۰

**پاسخ: گزینه ۴**

اعداد $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ بر روی تاس تصور کنید. اکنون از بین جایگاه‌ها یک جایگاه انتخاب می‌کنیم و یکی ار اعداد را در آن قرار می‌دهیم.

$$\underbrace{\binom{۶}{۱}}_{\text{جایگاه}}\times\underbrace{۶}_{\text{ارقام}} = ۳۶$$

اکنون دو جایگاه دیگر انتخاب می کنیم و دو عدد دیگر در آن‌ها قرار می‌دهیم.

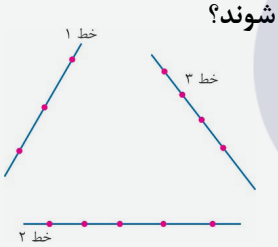
$$\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{جایگاه}}\times\underbrace{۵}_{\text{ارقام}} = ۵۰$$

اکنون در سه جایگاه دیگر، اعداد دیگر را قرار می‌دهیم.

$\binom{۳}{۳}\times۴ = ۴$

پس کل حالات برابر است با $۳۶\times۵۰\times۴ = ۷۲۰۰$.

**7. چند مثلث مختلف می‌توان رسم کرد، به طوری که رئوس آنها از نقاط روی خطوط زیر انتخاب شوند؟**




۱) ۲۲۰
۲) ۲۰۵
۳) ۱۱۰
۴) ۵۵

**پاسخ: گزینه ۲**

تعداد کل نقاط $= ۳+۵+۴ = ۱۲$

تعداد کل انتخاب‌های ۳ رأس $= \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲!}{۹!\times۳!} = \frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۶} = ۲۲۰$

در حالت‌هایی که ۳ نقطه روی یک خط باشند مثلث ساخته نمی‌شود: $\binom{۳}{۳}+\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۳} = ۱+۱۰+۴ = ۱۵$

تعداد کل مثلث‌ها $= ۲۲۰-۱۵ = ۲۰۵$

**8. مجموعهٔ $A = \{۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ چند زیر مجموعهٔ حداقل ۳ عضوی دارد که شامل ۴ و فاقد ۵ باشند؟**

۱) ۳۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

**پاسخ: گزینه ۴**

حداقل ۳ عضوی فاقد ۵

- $\xrightarrow{\text{۳عضوی}}$ شامل ۴: $\{۴,\ldots,\ldots\} \rightarrow \binom{۴}{۲} = ۶$
- $\xrightarrow{\text{۴عضوی}}$ شامل ۴: $\{۴,\ldots,\ldots,\ldots\} \rightarrow \binom{۴}{۳} = ۴$
- $\xrightarrow{\text{۵عضوی}}$ شامل ۴: $\{۴,\ldots,\ldots,\ldots,\ldots\} \rightarrow \binom{۴}{۴} = ۱$

$\rightarrow \quad = ۶+۴+۱ = ۱۱$

**9. با ارقام ۰,۱,۲,۴,۵,۷ چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام که مضرب ۵ نباشند، می‌توان نوشت؟**

۱) ۴۸ ۲) ۴۰ ۳) ۳۶ ۴) ۳۲

**پاسخ: گزینه ۴**

عدد ۵ نمی‌تواند در یکان قرار بگیرد، پس ۲ حالت برای رقم یکان داریم. عدد صفر نمی‌تواند در رقم صدگان قرار بگیرد و چون تکرار ارقام مجاز نیست، پس ۴ حالت برای رقم صدگان داریم و در نهایت ۴ حالت برای رقم دهگان باقی می‌ماند.

$۴ \times ۴ \times ۲ = ۳۲$ عدد ۷,۱ — ۴ — ۴ — ۲ / ۰×

**10. علی و حسن و جواد و سه نفر دیگر در صف ورود به قطار هستند. تعداد جایگشت‌های این شش نفر در کدام حالت از بقیه بیشتر است؟**

۱) حسن قبل از جواد باشد ۲) حسن قبل از جواد و بعد از علی باشد

۳) علی نفر سوم باشد ۴) حسن نفر آخر نباشد.

**پاسخ: گزینه ۴**

در حالت‌هایی که ترتیب خاصی برای r شیء از n شیء متمایز داریم می‌توانیم از فرمول $\frac{n!}{r!}$ استفاده کنیم:

**گزینه ۱:** حسن قبل از جواد باشد: جایگشت ۶ نفر برابر $!۶$ است که در نصف حالت‌ها، حسن قبل از جواد و در نصف دیگر جواد قبل از حسن قرار می‌گیرد.

$r = ۲ \rightarrow \frac{۶!}{۲!} = ۳۶۰$

گزینه ۲: $r = ۳ \rightarrow \frac{۶!}{۳!} = \frac{۷۲۰}{۶} = ۱۲۰$

گزینه ۳: ۵ — ۴ — علی — ۱ — ۳ — ۲ — ۱ $۱ \times ۵! = ۱۲۰$

گزینه ۴: ۵ — ۴ — ۳ — ۲ — ۱ — هر کس جز حسن — ۵ $۵! \times ۵ = ۶۰۰$

بنابراین در گزینه ۴ تعداد حالت‌ها بیشتر است.

# پاسخنامه ریاضی ۸ اسفند ۱۴۰۳

**1. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,a)$ از خط $۵x+۱۲y+a+۳=۰$ برابر ۳ است. مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟**

۱) $-۴$ ۲) ۲ ۳) $-۲$ ۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۳**

**نکته** فاصلهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$AH=\frac{|ax.+by.+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

پس در این تست $AH=۳$ و $A(۲,a)$ و معادله خط $۵x+۱۲y+a+۳=۰$ می‌باشد:

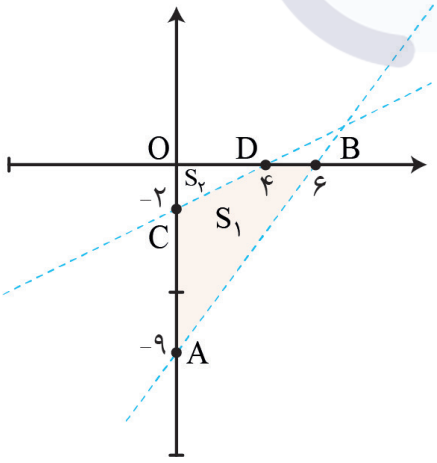
$$AH=\frac{|۵(۲)+۱۲(a)+a+۳|}{\sqrt{۵^۲+b^۲}}=۳\Rightarrow\frac{|۱۳a+۱۳|}{۱۳}=۳$$

$$|۱۳a+۱۳|=۳۹\Rightarrow\begin{cases}۱۳a+۱۳=۳۹\Rightarrow ۱۳a=۲۶\rightarrow a_۱=۲\\ ۱۳a+۱۳=-۳۹\Rightarrow ۱۳a=-۵۲\Rightarrow a_۲=-۴\end{cases}\Rightarrow a_۱+a_۲=-۲$$

**2. مساحت ناحیهٔ محدود بین دو خط $x-۲y-۴=۰$ و $۳x-۲y-۱۸=۰$ در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات کدام است؟**

۱) ۲۳ ۲) ۲۷ ۳) ۴۰ ۴) ۲۰

**پاسخ: گزینه ۱**




ابتدا دو خط را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و محل برخورد خط با محور طول و عرض را مشخص می‌کنیم:

$$۱)\ ۲y=x-۴\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-۲\Rightarrow\begin{cases}x=۰\Rightarrow y=-۲\\ y=۰\Rightarrow x=۴\end{cases}$$

$$۲)\ ۲y=۳x-۱۸\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x-۹\Rightarrow\begin{cases}x=۰\Rightarrow y=-۹\\ y=۰\Rightarrow x=۶\end{cases}$$

برای بدست آوردن مساحت ناحیه رنگی مساحت مثلث DCD را از مساحت مثلث OAB کم می‌کنیم.

$$S_{OAB}=S_۱+S_۲=\frac{۱}{۲}\times۹\times۶=۲۷$$

$$\Rightarrow S_۲=۲۷-۴=۲۳$$

$$S_{OCD}=S_۲=\frac{۱}{۲}\times۲\times۴=۴$$

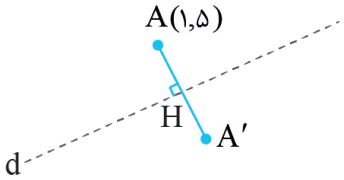
**3. خط d محورهای مختصات را در دو نقطهٔ $(۰,۳)$ و $(-۴,۰)$ قطع می‌کند. قرینهٔ نقطهٔ $A(۱,۵)$ نسبت به خط d کدام است؟**

۱) $(۲/۲,۳)$ ۲) $(۲,۳/۴)$ ۳) $(۲/۲,۳/۴)$ ۴) $(۲,۲/۲)$

**پاسخ: گزینه ۲**

$$\text{شیب خط d}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۳-۰}{۰+۴}=\frac{۳}{۴}$$

اگر دو خط با هم عمود باشند شیب‌هایشان قرینه و معکوس هم می‌باشد پس شیب خط $AA'$ برابر $-\frac{۴}{۳}$ است و معادله خط آن برابر است با:




معادله خط $AA'$ : $y-۵=-\frac{۴}{۳}(x-۱)\Rightarrow y=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۱۹}{۳}$

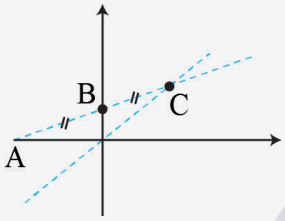
معادله خط d و $AA'$ را به دست می‌آوریم. : $y=\frac{۳}{۴}x+۳$

$$(-\frac{۴}{۳}x+\frac{۱۹}{۳}=\frac{۳}{۴}x+۳)\xrightarrow{\times ۱۲}-۱۶x+۷۶=۹x+۳۶\Rightarrow ۲۵x=۴۰\rightarrow x=\frac{۴۰}{۲۵}=\frac{۸}{۵},\ y=\frac{۲۱}{۵}$$

پس مختصات $H=(\frac{۸}{۵},\frac{۲۱}{۵})$ است باتوجه به اینکه H وسط $AA'$ است پس: $\frac{A+A'}{۲}=H$ یا $A'=۲H-A$ پس:

$$A'=۲H-A=(۲\times\frac{۸}{۵}-۱,۲\times\frac{۲۱}{۵}-۵)=(۲/۲,۳/۴)$$

**4. مطابق شکل، دو خط $y=\frac{۱}{۲}x$ و d در نقطهٔ C متقاطع‌اند. اگر $A(-۶,۰)$ و $AB=BC$ باشد، معادلهٔ خط d کدام است؟**




۱) $۴y+x-۶=۰$

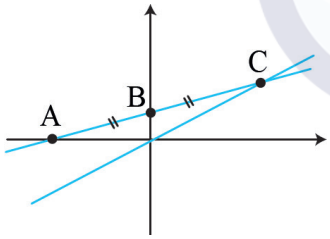
۲) $۴y-x-۶=۰$

۳) $x-۴y-۶=۰$

۴) $x+۴y-۶=۰$

**پاسخ: گزینه ۲**

مختصات نقطهٔ C را به صورت $(۲\alpha,\alpha)$ در نظر می‌گیریم. باتوجه به اینکه B وسط A و C است. پس برای بدست آوردن B باید میانگین A و C را بدست آوریم:




$$x_B=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{-۶+۲\alpha}{۲}=\alpha-۳$$
$$y_B=\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{۰+\alpha}{۲}=\frac{\alpha}{۲}$$
$$\Rightarrow B(\alpha-۳,\frac{\alpha}{۲})$$

باتوجه به اینکه نقطهٔ B روی محور عرض‌ها قرار دارد پس عرض B صفر است یعنی:

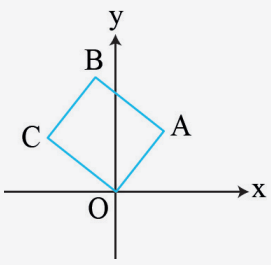
$$\frac{۲\alpha-۶}{۲}=۰\Rightarrow\alpha=۳$$

پس مختصات $C=(۶,۳)$ می‌باشد و داریم:

$$\text{شیب AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}:\frac{۳-۰}{۶+۶}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$\text{معادله خط AC}\Rightarrow y-۰=\frac{۱}{۴}(x+۶)\Rightarrow ۴y=x+۶\Rightarrow ۴y-x-۶=۰$$

**5. در مربع شکل مقابل، اگر $A(۲,۳)$ باشد، مجموع طول و عرض نقطهٔ B کدام است؟**



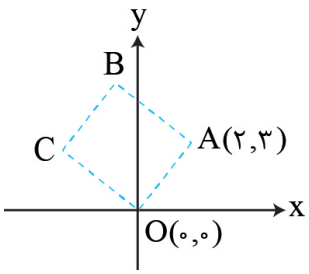

۱) ۴

۲) ۴/۵

۳) ۵

۴) ۳

**پاسخ: گزینه ۱**




$$m_{OA}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow[\text{شیب‌ها قرینه و معکوس}]{OA\perp AB} m_{AB}=-\frac{۲}{۳}$$

$$AB\text{ معادله}\Rightarrow y-۳=-\frac{۲}{۳}(x-۲)\rightarrow y=-\frac{۲}{۳}x+\frac{۱۳}{۳}$$

پس مختصات نقطه B را می‌توان به صورت $B=(m,\frac{-۲m+۱۳}{۳})$ نوشت:

$$OA=\sqrt{۲^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۳}\Rightarrow OB=\sqrt{۲}OA\Rightarrow OB=\sqrt{۲}\times\sqrt{۱۳}=\sqrt{۲۶}$$

$$OB=\sqrt{m^۲+(\frac{-۲m+۱۳}{۳})^۲}=\sqrt{۲۶}\Rightarrow m^۲+\frac{۴m^۲+۱۶۹-۵۲m}{۹}=۲۶$$

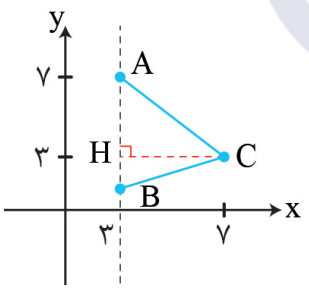
$$۱۳m^۲-۵۲m+۱۶۹=۲۳۴\Rightarrow ۱۳m^۲-۵۲m-۶۵=۰\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}m_۱=-۱\\ m_۲=\frac{۶۵}{۱۳}\end{cases}$$

باتوجه به شکل $m>۰$ است پس $m=-۱$ قابل قبول است و مختصات B به صورت $(-۱,۵)$ می‌باشد. پس مجموع طول و عرض نقطهٔ B برابر $-۱+۵=۴$ است.

**6. در مثلث ABC با رئوس $A(۳,۷)$ و $C(۷,۳)$، ضلع AB موازی محور yها است. اگر مساحت این مثلث برابر ۱۲ باشد، مختصات نقطهٔ B کدام می‌تواند باشد؟**

۱) $(۳,۱۲)$ ۲) $(۳,۱)$ ۳) $(۳,۴)$ ۴) $(۳,۱۱)$

**پاسخ: گزینه ۲**




چون ضلع AB موازی محور yها است، پس نقاط A و B دارای طول یکسانی هستند. بنابراین ضلع AB روی خط $x=۳$ قرار دارد و مختصات نقطهٔ B به صورت $(۳,m)$ است. باتوجه به شکل مقابل، ارتفاع CH برابر $۳-۷=۴$ است. پس مساحت این مثلث برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}|y_A-y_C|\times|CH|=۱۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}|y_A-y_C|\times۴=۱۲\Rightarrow|۷-y_C|=۶\Rightarrow\begin{cases}y_C=۱\\ y_C=۱۳\end{cases}$$

پس مختصات نقطهٔ B به صورت $(۳,۱)$ یا $(۳,۱۳)$ است.

**7. نقطهٔ $A(۲,۳)$ را نسبت به خط $y=۲$ و نقطهٔ $B(۳,-۱)$ را نسبت به خط $x=۳$ قرینه می‌کنیم تا به ترتیب نقاط $A'$ و $B'$ به دست آیند. سپس نقطهٔ $C(۴,-۱)$ را نسبت به نقطهٔ $P(۲,-۱)$ قرینه می‌کنیم تا به نقطهٔ $C'$ برسیم. مساحت مثلث $A'B'C'$ کدام است؟**

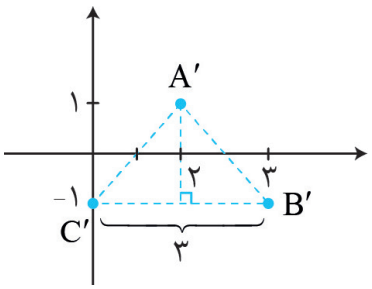
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۵

**پاسخ: گزینه ۲**

**نکته** قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت به خط $y=b$ برابر است با: $A':(x,۲b-y)$

**نکته** قرینهٔ نقطهٔ $A'(x,۲b-y)$ خط $x=m$ برابر است با: $A':(۲m-x,y)$

قرینه نقطه $A\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ نسبت به نقطه $O\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$ برابر است با $A'\begin{vmatrix}2\alpha-x\\2\beta-y\end{vmatrix}$: با استفاده از نکات گفته شده مختصات $A'$، $B'$، $C'$ را بدست می‌آوریم و مثلث $A'B'C'$ را رسم می‌کنیم.




$$A'(2,2\times2-3)\to A'(2,1)$$
$$B'(2\times3-3,-1)\to B'(3,-1)\Rightarrow$$
$$C'(2\times2-4,(2x-1)-(-1))\to C'(0,-1)$$
$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\times3\times2=3$$

**8. دو خط $d_1=3x+4y-14=0$ و $6x+8y+2=0$ را در نظر بگیرید. یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع روی خط $d_1$ و یک رأس آن روی خط $d_2$ قرار دارد. مساحت این مثلث کدام است؟**

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $4\sqrt{3}$

**پاسخ: گزینه ۳**

باتوجه به اینکه معادلات خطوط داده شده موازی‌اند پس:

فاصله این دو خط موازی ارتفاع مثلث را به ما می‌دهد و باتوجه به اینکه $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ از آن‌جا ضلع مثلث و درنهایت با استفاده از رابطهٔ $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ مساحت مثلث را بدست می‌آوریم. ابتدا معادله خط $d_1$ را در دو ضرب می‌کنیم تا ضرایب $x$ و $y$ یکسان شود و سپس از فرمول فاصله دو خط موازی ارتفاع مثلث را بدست می‌آوریم:

$$d_2:6x+8y+2=0\to 6x+8y+2=0$$
$$d_1:3x+4y-14=0\xrightarrow{\times2}6x+8y-28=0$$
$$\to h=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{6^2+8^2}}$$
$$\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{|2+28|}{10}=3\to a=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

**نکته** فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ از رابطهٔ $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ بدست می‌آید. (یعنی ابتدا باید ضرایب $x$ و $y$ هر دو معادله یکسان باشد و بعد از فرمول استفاده کنیم.)

**نکته** مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $a$ برابر است با: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

**نکته** ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $a$ برابر است با: $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

**9. عمودمنصف پاره‌خط گذرنده از نقاط $(3,4)$ و $(-1,8)$ با خط $y=\frac{m}{6}x+\frac{1}{4}$ زاویه $15^\circ$ تشکیل می‌دهد. حاصل‌ضرب مقادیر قابل قبول برای $m$ کدام است؟**

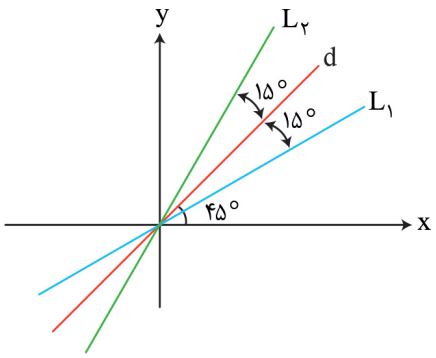
۱) ۶ ۲) ۳۶ ۳) ۱۲ ۴) ۹

**پاسخ: گزینه ۲**

ابتدا شیب پاره‌خط گذرنده از نقاط $(3,4),(-1,8)$ را به دست می‌آوریم.

$$m=\frac{8-4}{-1-3}=\frac{4}{-4}=-1$$

و از آنجا که شـــیب‌های دو خط عمود بر هم قرینه و معکوس یکدیگرند پس شـــیب عمودمنصف این پاره‌خط (d) برابر یک است بنابراین زاویه‌ای که این عمودمنصف (d) با جهت مثبت محور طول‌های می‌سازد $45^\circ$ است. طبق شکل هر دو خط $L_1$ و $L_2$ با خط d زاویه $15^\circ$ می‌سازند بنابراین زاویهٔ خطوط $L_1$ و $L_2$ با جهت مثبت محور طول‌ها برابر است با:




$$L_1 = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$
$$L_2 = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$$

بنابراین شیب خطوط $L_1$ و $L_2$ برابراند با:

$$m_{L_1} = \tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$m_{L_2} = \tan 60 = \sqrt{3}$$

پس:

$$\text{حالت۱)} \frac{m}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m = \frac{6\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{3} \times 6\sqrt{3} = 36$$
$$\text{حالت۲)} \frac{m}{6} = \sqrt{3} \Rightarrow m = 6\sqrt{3}$$

**10. دو ضلع مقابل به هم یک مستطیل روی خطوط به معادله $y - ax = 1$ و $ay - x = a - 1$ واقع هستند. اگر قطر مستطیل برابر ۵ و نقطه (۱,۲) یک رأس از مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟**

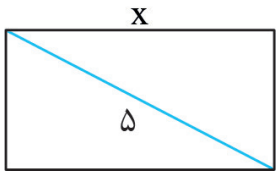
۱) ۲/۵ ۲) ۳/۵ ۳) $\sqrt{46}$ ۴) $2\sqrt{34}$

**پاسخ: گزینه ۲**

چون دو ضلع موازی‌اند، پس $a = 1$ است و معادلهٔ اضلاع مستطیل $y = x + 1$ و $y = x$ هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$d = \frac{|1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

یعنی عرض مستطیل برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ و قطر آن ۵ است، پس طبق رابطهٔ فیثاغورس، طول مستطیل برابر است با:




$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x^2 = 5^2 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{49}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر $S = \frac{7}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{2} = 3/5$ است.

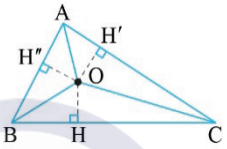
# پاسخنامه ریاضی ۲۲ اسفند ۱۴۰۳

**1. فاصلهٔ کدام نقطه از سه ضلع مثلث ABC، همواره یکسان است؟**

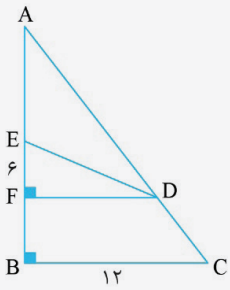
۱) تلاقی سه ارتفاع ۲) تلاقی سه میانه ۳) تلاقی سه نیمساز ۴) تلاقی سه عمودمنصف

**پاسخ: گزینه ۳**

در هر مثلث، نیمسازهای داخلی همرس هستند و نقطهٔ همرسی آن‌ها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. [چون هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است] یعنی در مثلث مقابل $OH = OH' = OH''$ است.




**2. در مثلث مقابل، $\frac{AD}{DC} = ۲$ و $EF = ۶$ و $BC = ۱۲$ است. طول پاره خط ED کدام است؟**




۱) ۹/۵

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۸/۵

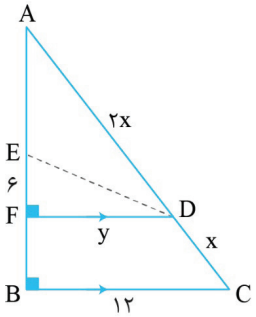
**پاسخ: گزینه ۳**

در مثلث ABC، دو ضلع BC و FD موازی‌اند. از آن‌جایی که $\frac{AD}{DC} = ۲$ است، پس با فرض $DC = x$ نتیجه می‌شود $AD = ۲x$ است.

حالا با کمک قضیه تالس (جزء به کل) داریم:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{FD}{BC} \Rightarrow \frac{۲x}{۳x} = \frac{y}{۱۲} \Rightarrow y = ۸$$

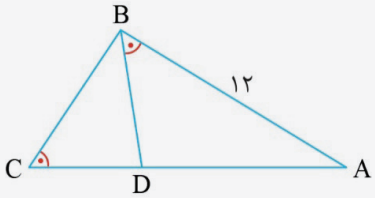
حالا به مثلث قائم‌الزاویهٔ EDF توجه کنید:




در این مثلث طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$(ED)^۲ = (FD)^۲ + (EF)^۲ \Rightarrow (ED)^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow ED = ۱۰$$

**3. در شکل مقابل، $A\hat{B}D = B\hat{C}A$ است و مساحت مثلث ABC، $\frac{۱۶}{۹}$ برابر مساحت مثلث ABD است. طول ضلع CD کدام است؟**




۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

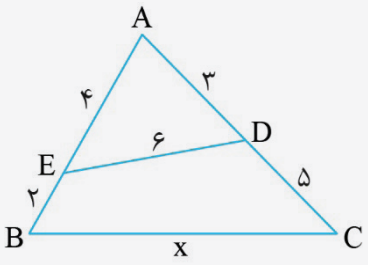
**پاسخ: گزینه ۱**

دو مثلث ABC و ABD در زاویهٔ $\hat{A}$ مشـــترک‌اند و همچنین دارای ۲ زاویهٔ برابر $A\hat{B}D$ و $B\hat{C}A$ هســـتند؛ بنابراین دو مثلث به حالت تســـاوی ۲ زاویه، متشابه‌اند. در ضمن، از آن‌جایی که مساحت مثلث ABC، $\frac{۱۶}{۹}$ برابر مساحت مثلث ABD است، پس نسبت تشابه آن‌ها برابر $\sqrt{\frac{۱۶}{۹}}=\frac{۴}{۳}$ است. حالا با نوشتن نسبت تشابه برای اضلاع این دو مثلث طول CD را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AB}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\begin{cases}\frac{AB}{AD}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{۱۲}{AD}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow AD=۹\\ \frac{AC}{AB}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{AC}{۱۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow AC=۱۲\end{cases}$$

بنابراین CD برابر است با: $CD=AC-AD=۱۲-۹=۳$

**4. در شکل مقابل، دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند. مقدار x کدام است؟**




۱) ۹

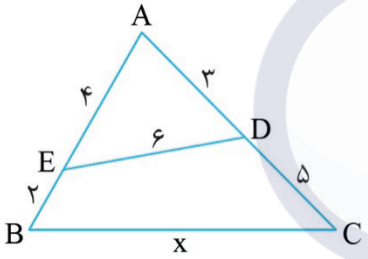
۲) ۱۰

۳) ۱۲

۴) ۱۵

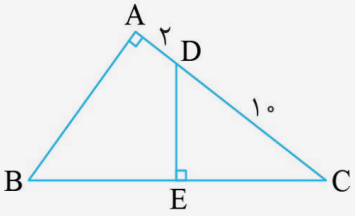
**پاسخ: گزینه ۳**

چون دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند، پس با نوشتن نسبت تشابه برای اضلاع دو مثلث داریم:




$$\frac{BC}{ED}=\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}\Rightarrow\frac{x}{۶}=\frac{۸}{۴}=\frac{۶}{۳}\Rightarrow x=۲$$

**5. در شکل مقابل، محیط مثلث ABC، ۱/۵ برابر محیط مثلث DEC است. طول پاره‌خط BE چقدر است؟**




۱) ۶

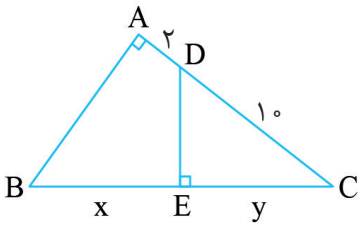
۲) ۶/۵

۳) ۷

۴) ۷/۵

**پاسخ: گزینه ۳**

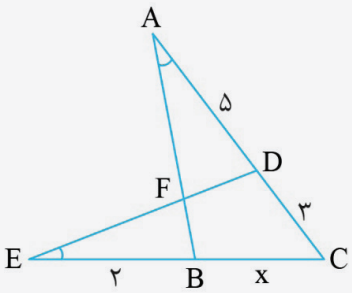
چون دو مثلث ABC و DEC در زاویهٔ $\hat{C}$ مشترک هستند و همچنین یک زاویهٔ قائمه نیز دارند، پس به حالت تساوی ۲ زاویه متشابه‌اند. از طرفی، محیط مثلث ABC، ۱/۵ برابر محیط مثلث DEC است، پس نسبت تشابه آن‌ها برابر ۱/۵ است. بنابراین با نوشتن نسبت تشابه برای اضلاع این دو مثلث، طول پاره‌خط BE را پیدا می‌کنیم:




$$\frac{BC}{DC}=\frac{AC}{EC}=۱/۵\Rightarrow\frac{x+y}{۱۰}=\frac{۱۲}{y}=۱/۵$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱۲}{y}=۱/۵\Rightarrow y=۸\\ \frac{x+y}{۱۰}=۱/۵\Rightarrow\frac{x+۸}{۱۰}=۱/۵\Rightarrow x=۷\end{cases}$$

**6. در شکل مقابل، $B\hat{A}C = D\hat{E}C$ است. مقدار x کدام است؟**




۱) ۲/۸

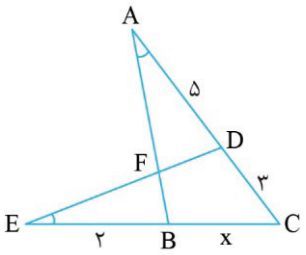
۲) ۳

۳) ۳/۵

۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۴**

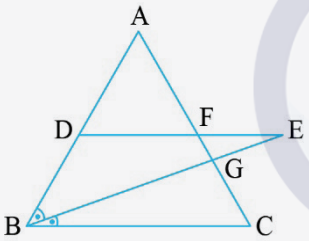
دو مثلث ABC و DEC در رأس $\hat{C}$ مشترک‌اند و دارای دو زاویهٔ برابر $B\hat{A}C$ و $D\hat{E}C$ هستند. بنابراین به حالت تساوی ۲ زاویه متشابه‌اند و داریم:




$$\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{۸}{۲+x} \Rightarrow x^۲ + ۲x = ۲۴$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۲x - ۲۴ = ۰ \Rightarrow (x+۶)(x-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \checkmark \\ x = -۶ \times \end{cases}$$

**7. در مثلث ABC مقابل، پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند و BE نیمساز زاویهٔ B است. اگر $BD = ۸$ و $DF = ۴$ باشد و طول پاره‌خط CG دو برابر GF باشد، طول ضلع BC کدام است؟**




۱) ۶

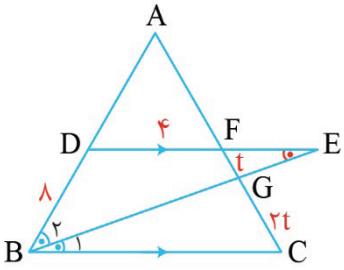
۲) ۷

۳) ۸

۴) ۹

**پاسخ: گزینه ۳**

چون DE و BC موازی‌اند و BE مورب است، پس $\hat{B}_۱ = \hat{E}$ است. بنابراین مثلث BDE متساوی‌الساقین است و در نتیجه $BD = DE = ۸$ است، پس:

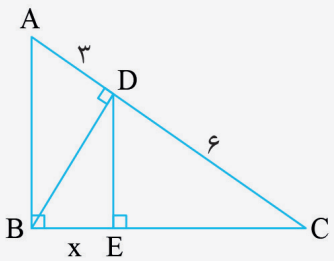



$$DE = ۸ \Rightarrow DF + FE = ۸ \Rightarrow ۴ + FE = ۸ \Rightarrow FE = ۴$$

حالا به دو مثلث BCG و EFG نگاه کنید. این دو مثلث در رأس G، متقابل به رأس هستند و $\hat{B}_۱ = \hat{E}$ است. پس به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند. بنابراین:

$$\frac{BC}{FE} = \frac{CG}{FG} \Rightarrow \frac{BC}{۴} = \frac{۲t}{t} \Rightarrow BC = ۸$$

**8. مطابق شکل، ارتفاع وارد بر وتر در هر دو مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است، مقدار x کدام است؟**




۱) $\sqrt{۳}$

۲) ۲

۳) $\sqrt{۵}$

۴) $\sqrt{۶}$

**پاسخ: گزینه ۴**

باتوجه به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$(BD)^۲ = AD \times CD = ۳ \times ۶ \Rightarrow BD = ۳\sqrt{۲}$$

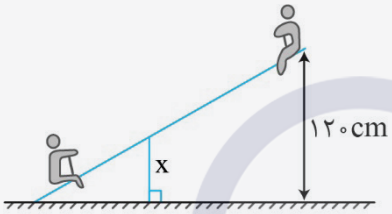
حالا در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCD، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$(BC)^۲ = (BD)^۲ + (CD)^۲ \Rightarrow (BC)^۲ = (۳\sqrt{۲})^۲ + ۶^۲ = ۵۴ \Rightarrow BC = \sqrt{۵۴}$$

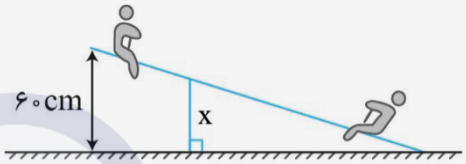
حالا به کمک روابط طولی در همین مثلث BCD داریم:

$$(BD)^۲ = BE \times BC \Rightarrow ۱۸ = x \times \sqrt{۵۴} \Rightarrow x = \frac{۱۸}{۳\sqrt{۶}} = \sqrt{۶}$$

**9. یک الاکلنگ با بازوهای نابرابر ساخته شده است. مطابق شکل (۱) وقتی انتهای سمت چپ این الاکلنگ روی زمین قرار می‌گیرد، ارتفاع انتهای سمت راست از سطح زمین برابر ۱۲۰ سانتی‌متر می‌شود و مطابق شکل (۲)، وقتی که انتهای سمت راست الاکلنگ روی زمین قرار می‌گیرد، ارتفاع انتهای سمت چپ از سطح زمین برابر ۶۰ سانتی‌متر می‌شود. طول تکیه‌گاه این الاکلنگ یعنی x، چقدر است؟**



شکل (۱)

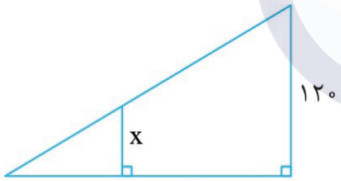


شکل (۲)

۱) ۵۰ ۲) ۴۵ ۳) ۴۰ ۴) ۳۸

**پاسخ: گزینه ۳**

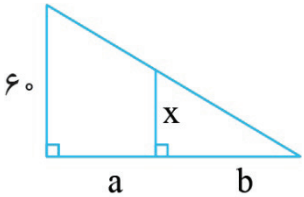
باتوجه به شکل‌های داده شده، کافی است دوبار از قضیهٔ تالس استفاده کنیم. باتوجه به شکل مقابل، داریم:



شکل (۱)

$$\frac{x}{۱۲۰} = \frac{a}{a+b}$$

همچنین در شکل مقابل، خواهیم داشت:



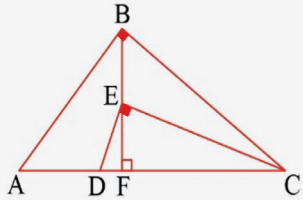
شکل (۲)

$$\frac{x}{۶۰} = \frac{b}{a+b}$$

حالا طرفین این دو رابطه را با هم جمع می‌کنیم:

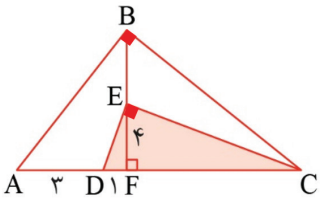
$$\frac{x}{۱۲۰} + \frac{x}{۶۰} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \Rightarrow \frac{۳x}{۱۲۰} = ۱ \Rightarrow x = ۴۰$$

**10. در شکل زیر، $A\hat{B}C = C\hat{E}D = ۹۰^\circ$ است. اگر $AD = ۳$ و $EF = ۴$ و $DF = ۱$ باشد، اندازهٔ BC کدام است؟**




۱) $۴\sqrt{۶}$
۲) $۱۰\sqrt{۲}$
۳) $۶\sqrt{۳}$
۴) $۸\sqrt{۵}$

**پاسخ: گزینه ۴**




در مثلث قائم‌لزاویهٔ CED داریم:

$$EF^{۲} = DF \times FC \Rightarrow ۴^{۲} = ۱ \times FC \Rightarrow FC = ۱۶$$

حالا به مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC توجه کنید:

$$BC^{۲} = CF \times CA = ۱۶ \times ۲۰ \Rightarrow BC = ۸\sqrt{۵}$$

گروه آموزشی ماز

# دوپینگ

گروه آموزشی ماز

۱- درون یک سالن مستطیل شکل بزرگ، فرشی به شکل مستطیل و با ابعاد ۱۲ و ۸ متر وجود دارد. اگر فاصلهٔ هر طرف فرش از دیوار سالن برابر مقدار ثابت $m$ باشد و مجموع مساحت قسمت‌های فرش نشده برابر ۱۵۶ مترمربع باشد، $m$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

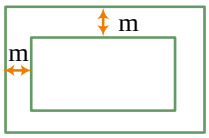
پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

مساحت فرش $۸\times ۱۲=۹۶$ مترمربع و مجموع مساحت قسمت‌های فرش نشده برابر ۱۵۶ مترمربع است، پس مساحت سالن برابر $۹۶+۱۵۶=۲۵۲$ مترمربع است. فاصلهٔ هر طرف فرش از دیوار سالن برابر $m$ است، پس طول و عرض سالن به ترتیب $۱۲+۲m$ و $۸+۲m$ است، بنابراین داریم:

$$(۱۲+۲m)(۸+۲m)=۲۵۲$$

$$۹۶+۲۴m+۱۶m+۴m^۲=۲۵۲\Rightarrow ۴m^۲+۴۰m-۱۵۶=۰$$

$$\Rightarrow m^۲+۱۰m-۳۹=۰\Rightarrow (m-۳)(m+۱۳)=۰\Rightarrow \begin{cases} m=-۱۳ & \text{غ ق ق} \\ m=۳ & \checkmark \end{cases}$$




ریشه‌ها رو چطور پیدا کنیم؟ با تجزیه ...

| تجزیه به کمک فاکتورگیری | تجزیه به کمک اتحاد مزدوج | تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک |
|---|---|---|
| $mx^۲+nx=x(mx+n)$ | $x^۲-m^۲=(x-m)(x+m)$ | $x^۲+mx+n=(x+\bigcirc)(x+\square)$ |
| $۲x^۲-۴x=x(۲x-۴)$ | $x^۲-۱۶=(x-۴)(x+۴)$ | $x^۲-x-۶=(x-۳)(x+۲)$ |

گروه آموزشی ماز

۲- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادله درجه دوم $x^۲-(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})x+\sqrt{۶}=۰$ باشند و $x_۲>x_۱$ باشد، حاصل $x_۱^۴+x_۲^۲$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳ ازمون وی ای پی (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

$$x^۲-(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})x+\sqrt{۶}=۰$$

توجه شود که $\sqrt{۶}$ حاصل‌ضرب دو عدد $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ است، پس طبق اتحاد جمله مشترک خواهیم داشت:

$$(x-\sqrt{۲})(x-\sqrt{۳})=۰\Rightarrow \begin{cases} x_۱=\sqrt{۲} \\ x_۲=\sqrt{۳} \end{cases}$$

$$x_۱^۴+x_۲^۲=(\sqrt{۲})^۴+(\sqrt{۳})^۲=۴+۳=۷$$

گروه آموزشی ماز

۳- هرگاه $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله $x^۲-(۲k+۲)x-۲=۰$ باشند و بین ریشه‌ها، رابطهٔ $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=-۴$ برقرار باشد، مقدار $k$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $-۲$ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $-۳$

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

$$x^۲-۲(k+۱)x-۲=۰\Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=۲(k+۱) \\ P=\alpha\beta=-۲ \end{cases}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=-۴\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{S^۲-۲P}{P}=-۴\Rightarrow \frac{۴(k+۱)^۲+۴}{-۲}=-۴$$

$$(k+۱)^۲=۱\Rightarrow \begin{cases} k=۰ \\ k=-۲ \end{cases}$$

**هر آنچه باید در مورد روابط بین ریشه‌ها بدانید!**

| رابطه | حاصل برحسب S و P |
|---|---|
| $\alpha^۲+\beta^۲$ | $\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=S^۲-۲P$ |
| $\alpha^۳+\beta^۳$ | $\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳PS$ |
| $\alpha^۴+\beta^۴$ | $\alpha^۴+\beta^۴=(\alpha^۲+\beta^۲)^۲-۲(\alpha\beta)^۲=(S^۲-۲P)^۲-۲P^۲$ |
| $\alpha^۶+\beta^۶$ | $\alpha^۶+\beta^۶=(\alpha^۲+\beta^۲)^۳-۳(\alpha\beta)^۲(\alpha^۲+\beta^۲)=(S^۲-۲P)^۳-۳P^۲(S^۲-۲P)$ |
| $\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}$ | $\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}=\frac{\beta^۲+\alpha^۲}{\alpha^۲\beta^۲}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{(\alpha\beta)^۲}=\frac{S^۲-۲P}{P^۲}$ |
| $\frac{۱}{\alpha^۳}+\frac{۱}{\beta^۳}$ | $\frac{۱}{\alpha^۳}+\frac{۱}{\beta^۳}=\frac{\beta^۳+\alpha^۳}{\alpha^۳\beta^۳}=\frac{(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^۳}=\frac{S^۳-۳PS}{P^۳}$ |
| $\frac{۱}{\alpha^۴}+\frac{۱}{\beta^۴}$ | $\frac{۱}{\alpha^۴}+\frac{۱}{\beta^۴}=\frac{\beta^۴+\alpha^۴}{\alpha^۴\beta^۴}=\frac{(\alpha^۲+\beta^۲)^۲-۲(\alpha\beta)^۲}{(\alpha\beta)^۴}=\frac{(S^۲-۲P)^۲-۲P^۲}{P^۴}$ |
| $\lvert\alpha-\beta\rvert$ | $\lvert\alpha-\beta\rvert=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$ |
| $\lvert\alpha^۲-\beta^۲\rvert$ | $\lvert\alpha^۲-\beta^۲\rvert=\lvert(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\rvert=\lvert\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}\times S\rvert$ |
| $\lvert\alpha^۳-\beta^۳\rvert$ | $\lvert\alpha^۳-\beta^۳\rvert=\lvert(\alpha-\beta)(\alpha^۲+\beta^۲+\alpha\beta)\rvert=\lvert\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}(S^۲-P)\rvert$ |
| $\lvert\alpha^۴-\beta^۴\rvert$ | $\lvert\alpha^۴-\beta^۴\rvert=\lvert(\alpha^۲-\beta^۲)(\alpha^۲+\beta^۲)\rvert=\lvert\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}(S)(S^۲-۲P)\rvert$ |
| $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ | $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}\quad(\alpha,\beta>۰)$ |
| $\lvert\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\rvert$ | $\lvert\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\rvert=\sqrt{\alpha+\beta-۲\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{S-۲\sqrt{P}}\quad(\alpha,\beta>۰)$ |
| $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$ | $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{S}{\sqrt{P}}$ |

گروه آموزشی ماز

**۴- در یک مستطیل طول سه برابر عرض مستطیل است. مقدار ثابتی به عرض اضافه می‌کنیم و به همان مقدار از طول مستطیل کم می‌کنیم به‌طوری که مستطیل حاصل به مستطیل طلایی تبدیل شود. مقدار ثابت چه عددی است؟**

۱) $۵+۲\sqrt{۵}$ ۲) $\frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۲}$

۳) $۵-۲\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۴}$

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

در ابتدا برای راحتی کار اضلاع مستطیل را ۱ و ۳ فرض می‌کنیم. اگر مقدار ثابت را $k$ فرض کنیم آن‌گاه قرار است مستطیل با اضلاع $۳-k$ و $۱+k$ طلایی باشد. یعنی $\frac{۳-k}{۱+k}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$.

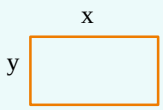
۳

۱ $۶-۲k=۱+\sqrt{۵}+k+k\sqrt{۵}\Rightarrow ۵-\sqrt{۵}=۳k+k\sqrt{۵}$

$$k=\frac{۵-\sqrt{۵}}{۳+\sqrt{۵}}\times\frac{۳-\sqrt{۵}}{۳-\sqrt{۵}}\Rightarrow k=\frac{۱۵+۵-۸\sqrt{۵}}{۴}=\frac{۲۰-۸\sqrt{۵}}{۴}=۵-۲\sqrt{۵}$$

### مستطیل داریم از نوع طلایی!

اگر در یک مستطیل با طول $x$ و عرض $y$، رابطه زیر برقرار باشد، در این صورت به آن مستطیل، **مستطیل طلایی** و به نسبت $\frac{x}{y}$، **نسبت طلایی** می‌گوییم.




$$\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}$$

حال اگر در معادله فوق $y=۱$ فرض کنیم، داریم:

$$x=\frac{x+۱}{x}\Rightarrow x^۲-x-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\\ x_۲=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\end{cases}$$ غ ق ق

توجه داشته باشید که عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$، به **عدد طلایی** معروف است و مقدار تقریبی آن برابر $۱/۶۱۸$ می‌باشد، بنابراین می‌توان گفت که در یک مستطیل طلایی، نسبت طول به عرض آن برابر $\frac{x}{y}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است.

گروه آموزشی ماز

**۵- اگر معادلهٔ $۴x^۲+۶x+k-۵=۰$ حداکثر یک جواب داشته باشد، کوچک‌ترین مقدار صحیح $k$ کدام است؟**

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) $-۷$ ۴) $-۸$

پاسخ: گزینه ۲ **ازمون وی ای پی** (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

شرط این‌که معادله دارای حداکثر یک جواب باشد این است که $\Delta\le۰$ باشد، پس خواهیم داشت:

$$۴x^۲+۶x+k-۵=۰$$

$$\Delta\le۰\Rightarrow ۳۶-۴(۴)(k-۵)\le۰\Rightarrow ۳۶-۱۶k+۸۰\le۰\Rightarrow ۱۶k\ge۱۱۶\Rightarrow k\ge\frac{۱۱۶}{۱۶}\Rightarrow k\ge\frac{۲۹}{۴}$$

پس کوچک‌ترین مقدار صحیح $k$ برابر ۸ است.

### ریشه‌ها

| $ax^۲+bx+c=۰\ ;\ (a\neq۰)$ | | | |
|---|---|---|---|
| $\Delta=b^۲-۴ac$ | $\Delta>۰$ | $\Delta=۰$ | $\Delta<۰$ |
| تعداد ریشه‌ها | معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد. | معادله یک ریشه مضاعف دارد. | معادله ریشه حقیقی ندارد. |
| ریشه‌ها | $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$ | $x=-\frac{b}{۲a}$ | - |

گروه آموزشی ماز

**۶- به ازای چه مقادیری از $m$ معادلهٔ $x^۴-(m+۲)x^۲-(m+۴)=۰$ فاقد جواب حقیقی است؟**

۱) $-۴<m<-۲$ ۲) $m<-۴$ ۳) $m>۲$ ۴) به ازای هیچ مقدار $m$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

با فرض $x^۲=t$ خواهیم داشت:

$$x^۴-(m+۲)x^۲-(m+۴)=۰\Rightarrow t^۲-(m+۲)t-(m+۴)=۰$$

$$\Delta=(m+۲)^۲+۴(m+۴)=m^۲+۴m+۴+۴m+۱۶=m^۲+۸m+۲۰=m^۲+۸m+۱۶+۴=(m+۴)^۲+۴\Rightarrow$$ $\Delta$ همواره مثبت است

پس در معادلهٔ همواره $\Delta>۰$ است، یعنی معادلهٔ همواره دو جواب حقیقی متمایز دارد. حال اگر بخواهیم معادلهٔ اصلی فاقد ریشهٔ حقیقی باشد باید هر دو ریشهٔ معادلهٔ جدید، منفی باشند (زیرا به ازای مقادیر منفی $t$، برای معادلهٔ $x^۲=t$ جوابی به دست نمی‌آید.)

شرط وجود دو ریشهٔ حقیقی منفی برای معادلهٔ جدید این است که:

$$\begin{cases}\Delta>0 \Rightarrow \text{همواره برقرار}\\ P>0 \Rightarrow -(m+4)>0 \Rightarrow m+4<0 \Rightarrow m<-4\\ S<0 \Rightarrow m+2<0 \Rightarrow m<-2\end{cases}$$

اشتراک مقادیر به دست آمده برای $m$ به صورت $m<-4$ است.

**معادلات به فرم $ax^4+bx^2+c=0$:**

برای حل معادلات به فرم $ax^4+bx^2+c=0$، از تغییر متغیر $x^2=t$ استفاده کرده و معادله را به شکل $at^2+bt+c=0$ می‌نویسیم و آن را حل می‌کنیم، سپس $t$های به دست آمده را برابر $x^2$ قرار داده و مقادیر $x$ را محاسبه می‌کنیم. توجه داشته باشید که چون $x^2=t\geq 0$ است، بنابراین $t$های منفی غیرقابل قبول هستند.

| $ax^4+bx^2+c=0$ | $at^2+bt+c=0$ | شرط |
|---|---|---|
| ۴ ریشه حقیقی متمایز | دو ریشه متمایز مثبت | $\Delta>0, S>0, P>0$ |
| ۳ ریشه حقیقی متمایز | یک ریشه صفر و یک ریشه مثبت | $S>0, P=0$ |
| ۲ ریشه حقیقی متمایز | دو ریشه مختلف‌العلامت | $P<0$ |
| | یک ریشه مضاعف مثبت | $\Delta=0, S>0$ |
| فقط یک ریشه حقیقی | یک ریشه صفر و یک ریشه منفی | $S<0, P=0$ |
| | یک ریشه مضاعف صفر | $b=c=0$ |
| فاقد ریشه حقیقی | فاقد ریشه حقیقی | $\Delta<0$ |
| | دو ریشه ساده منفی | $\Delta>0, S<0, P>0$ |
| | یک ریشه مضاعف منفی | $\Delta=0, S<0$ |

گروه آموزشی ماز

۷- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x-1}{x+1}<\frac{x-2}{x}$ به صورت $(a,b)$ است. حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) $-1$ ۲) $-2$ ۳) $\frac{-3}{2}$ ۴) $\frac{-5}{2}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

$$\frac{x-1}{x+1}<\frac{x-2}{x} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1}-\frac{x-2}{x}<0 \Rightarrow \frac{x^2-x-(x^2-x-2)}{x(x+1)}<0 \Rightarrow \frac{2}{x(x+1)}<0$$

چون صورت کسر مثبت است، پس باید مخرج آن منفی باشد، یعنی داریم: $x(x+1)<0$

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x(x+1)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

مجموعه جواب $=(-1,0)$

بنابراین $a=-1$ و $b=0$ است و در نتیجه $a-b=-1$ است.

گروه آموزشی ماز

۸- چند عدد صحیح در نامعادلهٔ $x^2\leq 8|x|-12$ صدق می‌کند؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

$$x^2\leq 8|x|-12 \Rightarrow |x|^2-8|x|+12\leq 0 \Rightarrow (|x|-2)(|x|-6)\leq 0 \Rightarrow 2\leq|x|\leq 6 \Rightarrow \begin{cases}2\leq x\leq 6\\ -6\leq x\leq -2\end{cases}$$

بنابراین اعداد صحیحی که در نامعادله صدق می‌کنند، عبارتند از: $-2,-3,-4,-5,-6$ و $2,3,4,5,6$ که تعداد آن‌ها برابر ۱۰ است.

**معادلات به فرم $ax^2+b|x|+c=0$:**

برای حل معادلات به فرم $ax^2+b|x|+c=0$، از تغییر متغیر $|x|=t$ استفاده کرده و معادله را به شکل $at^2+bt+c=0$ می‌نویسیم و آن را حل می‌کنیم، سپس $t$های به دست آمده را برابر $|x|$ قرار داده و مقادیر $x$ را محاسبه می‌کنیم. توجه داشته باشد که چون $|x|=t\geq 0$ است، بنابراین $t$های منفی غیرقابل قبول هستند.

گروه آموزشی ماز

۹- جواب معادلهٔ $\sqrt{\frac{۸}{۲x-۱}+۲۰}=\frac{۱}{۲x-۱}$ برابر $\frac{a}{۲۰}$ است. a کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۳ ۳) ۹ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

$$\sqrt{\frac{۸}{۲x-۱}+۲۰}=\frac{۱}{۲x-۱}$$

فرض: $\frac{۱}{۲x-۱}=t \Rightarrow \sqrt{۸t+۲۰}=t$

بدیهی است که باید $t \geq ۰$ باشد، بنابراین با شرط $t \geq ۰$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۸t+۲۰=t^۲ \Rightarrow t^۲-۸t-۲۰=۰ \Rightarrow (t-۱۰)(t+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱۰ \\ t=-۲ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$t=۱۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲x-۱}=۱۰ \Rightarrow ۲x-۱=\frac{۱}{۱۰} \Rightarrow x=\frac{۱۱}{۲۰}$$

$$\Rightarrow a=۱۱$$

**معادله‌های رادیکالی (گنگ)**

به معادله‌هایی که در آن‌ها مجهول (متغیر) زیر رادیکال قرار داشته باشد، معادله‌های رادیکالی (گنگ) می‌گوییم.

**به عنوان مثال:**

معادله‌های زیر چند نمونه از معادلات رادیکالی هستند.

$$\frac{۵}{\sqrt{x}+۲}=۲-\frac{۱}{\sqrt{x}-۲} \qquad \sqrt{x+۳}+\sqrt{۳x+۱}=۴ \qquad \sqrt{x+۲}=x-۴$$

برای حل یک معادله رادیکالی باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) یکی از رادیکال‌ها را در یک طرف معادله نگه می‌داریم و مابقی جمله‌ها را به طرف دیگر معادله منتقل می‌کنیم.

۲) طرفین معادله را به توان مناسب می‌رسانیم. (معمولاً طرفین را به توان ۲ می‌رسونیم)

**توجه:**

توجه داشته باشید که اگر با به توان رساندن طرفین معادله، مجدداً در معادله عبارت رادیکالی حضور داشته باشد سعی می‌کنیم که با تکرار مراحل ۱ و ۲، کل معادله را از حالت رادیکالی خارج کنیم)

۳) معادله به دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و آن را حل می‌کنیم و جواب (با جواب‌های) معادله را به دست می‌آوریم.

۴) جواب(های) به دست آمده را در معادله اصلی آزمایش می‌کنیم و جواب‌هایی را قبول می‌کنیم که اولاً در دامنه تعریف متغیر معادله قرار داشته باشند و ثانیاً در معادله اصلی صدق کنند.

گروه آموزشی ماز

۱۰- اگر یکی از ریشه‌های معادله $۲x-k=\sqrt{۱۱x-۲۴}$ برابر k باشد، ریشه دیگر کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱۳}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

$$x=k \Rightarrow ۲k-k=\sqrt{۱۱k-۲۴} \Rightarrow k^۲-۱۱k+۲۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} k=۳ \\ k=۸ \end{cases}$$

$$k=۳: (۲x-۳)^۲=۱۱x-۲۴ \Rightarrow ۴x^۲+۹-۱۲x=۱۱x-۲۴$$

$$۴x^۲-۲۳x+۳۳=۰$$

$$(x-۳)(۴x-۱۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=\frac{۱۱}{۴} \end{cases}$$

$$k=۸: (۲x-۸)^۲=۱۱x-۲۴ \Rightarrow ۴x^۲-۳۲x+۶۴=۱۱x-۲۴$$

$$۴x^۲ - ۴۳x + ۸۸ = ۰$$

$$(x-۸)(۴x-۱۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۸ \\ x = \frac{۱۱}{۴} \end{cases}$$

البته یکی از معادلات را هم حل می‌کردیم، کافی بود.

**گروه آموزشی ماز**

**۱۱- یک مخزن آب توسط دو شیر A و B پر می‌شود. زمان پر شدن مخزن توسط شیر B، سه برابر زمان شیر A است. اگر هر دو شیر باز باشند، مخزن در ۹ ساعت پر می‌شود. اختلاف زمان پر شدن مخزن توسط هر یک از شیرها به تنهایی کدام است؟**

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۳ ازمون وی ای پی (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

زمان پر شدن مخزن توسط شیر B، سه برابر شیر A است، پس داریم:

$$\text{زمان پر شدن توسط شیر A} = t \Rightarrow \text{A میزان پر شدن در یک ساعت توسط شیر} = \frac{۱}{t}$$

$$\text{زمان پر شدن توسط شیر B} = ۳t \Rightarrow \text{B میزان پر شدن در یک ساعت توسط شیر} = \frac{۱}{۳t}$$

$$\text{زمان پر شدن توسط هر دو شیر A و B} = ۹ \Rightarrow \text{میزان پر شدن در یک ساعت توسط هر دو شیر} = \frac{۱}{۹}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{t} + \frac{۱}{۳t} = \frac{۱}{۹} \Rightarrow \frac{۴}{۳t} = \frac{۱}{۹} \Rightarrow ۳t = ۳۶ \Rightarrow t = ۱۲$$

$$\text{اختلاف زمان پر شدن مخزن توسط شیرهای A و B} = ۳t - t = ۲t = ۲۴$$

**مسائل مربوط به موازی کاری**

اگر شخص A کاری را به تنهایی در x روز (ساعت) و شخص B همان کار را به تنهایی در y روز (ساعت) انجام دهند، در این صورت:

- شخص A به تنهایی در هر روز (ساعت)، $\frac{۱}{x}$ از کل کار را انجام می‌دهد.
- شخص B به تنهایی در هر روز (ساعت)، $\frac{۱}{y}$ از کل کار را انجام می‌دهد.
- اگر شخص A و شخص B هر دو با هم کار کنند در هر روز (ساعت)، $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y}$ از کل کار را انجام می‌دهند.

**گروه آموزشی ماز**

**۱۲- اگر حاصل عبارت $P(x) = \frac{mx^۲ + (۲m+۳)x + ۳}{x^۲ + x + ۱}$، به ازای هر مقدار حقیقی x، همواره بزرگ‌تر از ۲ باشد، محدودهٔ m کدام است؟**

۱) $m < ۲$ ۲) $m > ۲$ ۳) به ازای هر مقدار m ۴) به ازای هیچ مقدار m

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

طبق فرض مسئله همواره داریم:

$$\frac{mx^۲ + (۲m+۳)x + ۳}{x^۲ + x + ۱} > ۲$$

چون مخرج کسر همواره مثبت است (زیرا $\Delta < ۰$ و $a > ۰$ است) پس مجاز هستیم طرفین نامعادله را در $(x^۲ + x + ۱)$ ضرب کنیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$mx^۲ + (۲m+۳)x + ۳ > ۲x^۲ + ۲x + ۲ \Rightarrow (m-۲)x^۲ + (۲m+۱)x + ۱ > ۰$$

چون نامساوی اخیر به ازای هر عدد حقیقی x برقرار است، پس باید $\Delta < ۰$ و $a > ۰$ باشد.

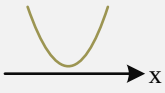
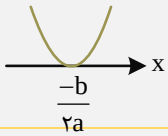
$$\begin{cases} a > ۰ \Rightarrow m - ۲ > ۰ \Rightarrow m > ۲ \\ \Delta < ۰ \Rightarrow (۲m+۱)^۲ - ۴(m-۲) < ۰ \Rightarrow ۴m^۲ + ۹ < ۰ \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = \varnothing \end{cases}$$

زیرا عبارت $۴m^۲ + ۹$ همواره مثبت است، پس به ازای هیچ مقدار m امکان ندارد، حاصل عبارت P(x) بزرگ‌تر از ۲ باشد.

### صفرهای تابع درجه دوم:

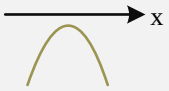
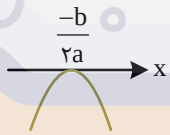
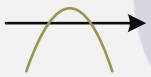
به نقاط برخورد نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ با محور xها، صفرهای تابع درجه دوم می‌گوییم که در واقع همان ریشه‌های معادله $f(x)=0$ هستند، به عبارت دیگر در این نقاط، مقدار تابع برابر صفر است.

حال برای اینکه وضعیت نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ نسبت به محور xها را بررسی کنیم باید به سراغ دلتای معادله سهمی و همچنین جهت دهانه سهمی برویم. (جدول‌ها رو دریاب ...)

| $a>0$ | | |
|---|---|---|
| $\Delta<0$ | $\Delta=0$ | $\Delta>0$ |
|  |  |  |
| تابع درجه دوم محور xها را قطع نمی‌کند.<br>تابع درجه دوم همواره بالای محور xها است.<br>تابع درجه دوم همواره مثبت است.<br>معادله درجه دوم ریشه حقیقی ندارد. | تابع درجه دوم بالای محور xها و بر آن مماس است.<br>معادله درجه دوم یک ریشه مضاعف $x=-\frac{b}{2a}$ دارد. | تابع درجه دوم محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.<br>معادله درجه دوم دو ریشه ساده دارد. |

**توجه:**

با توجه به جدول فوق می‌توان نتیجه گرفت شرط اینکه عبارت درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ همواره مثبت باشد، این است که $a>0$ و $\Delta<0$ باشد.

| $a<0$ | | |
|---|---|---|
| $\Delta<0$ | $\Delta=0$ | $\Delta>0$ |
|  |  |  |
| تابع درجه دوم محور xها را قطع نمی‌کند.<br>تابع درجه دوم همواره پایین محور xها است.<br>تابع درجه دوم همواره منفی است.<br>معادله درجه دوم ریشه حقیقی ندارد. | تابع درجه دوم پایین محور xها و بر آن مماس است.<br>معادله درجه دوم یک ریشه مضاعف $x=-\frac{b}{2a}$ دارد. | تابع درجه دوم محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.<br>معادله درجه دوم دو ریشه ساده دارد. |

**توجه:**

با توجه به جدول فوق می‌توان نتیجه گرفت شرط اینکه عبارت درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ همواره منفی باشد، این است که $a<0$ و $\Delta<0$ باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر $x=-2$ ریشهٔ معادلهٔ $\frac{x}{x+a}+\frac{1}{a}=\frac{x^2-14}{2a}$ باشد، $a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $-2$ ۴) $-3$

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

چون $x=-2$ ریشهٔ معادلهٔ $\frac{x}{x+a}+\frac{1}{a}=\frac{x^2-14}{2a}$ است، پس باید در معادله صدق کند، یعنی داریم:

$$\frac{-2}{-2+a}+\frac{1}{a}=\frac{4-14}{2a}\Rightarrow\frac{-2}{-2+a}=\frac{-6}{a}\Rightarrow -2a=12-6a\Rightarrow 4a=12\Rightarrow a=3$$

### معادلات گویا رو چطور حل کنیم؟

به معادله‌های شامل عبارت‌های کسری که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشد، معادله‌های گویا می‌گوییم.

### به عنوان مثال:

معادله‌های زیر نمونه‌ای از معادلات گویا هستند.

$$\frac{۳}{x+۲}+\frac{۲}{x}=\frac{۴x-۴}{x^۲-۴} \qquad \frac{x^۲+۵}{x^۲+۱}+\frac{۵}{x^۲+۲}=۳$$

برای حل معادله‌های شامل عبارت‌های گویا مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

- ابتدا مخرج هر یک از کسرها را (در صورت لزوم) به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم. (چندجمله‌ای)
- طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج کسرها ضرب می‌کنیم تا معادله از حالت کسری خارج شود.
- عبارت جبری به دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و معادله حاصل شده (معمولاً درجه ۲) را حل می‌کنیم.
- در نهایت جواب‌های به دست آمده را در معادله اصلی امتحان می‌کنیم.

### توجه:

توجه کنید که جواب‌های به دست آمده زمانی قابل قبول خواهند بود که اولاً مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر نکنند و ثانیاً این جواب‌ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت داشته باشند. *(قسمت دوم رو متوجه نشدم! یعنی اینکه مثلاً اگر قراره با مل به معادله طول یک شکل رو محاسبه کنیم، اندازه این طول رو منفی به دست نیاریم)*

گروه آموزشی ماز

**۱۴- سهمی $y=-۶(x-۱)(x-۳)$، خط $y=-۴۸$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. مساحت مثلثی که یک رأس آن روی رأس سهمی و دو رأس دیگرش نقاط A و B باشند، کدام است؟**

۱) ۱۶۲ ۲) ۱۷۶ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۵۸

**پاسخ: گزینه ۱** (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

ابتدا نقاط تلاقی خط $y=-۴۸$ را با نمودار سهمی به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y=-۶(x-۱)(x-۳) \\ y=-۴۸ \end{cases} \Rightarrow -۶(x-۱)(x-۳)=-۴۸$$

$$\Rightarrow x^۲-۴x-۵=۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=۵ \end{cases}$$

یعنی نقاط A و B دارای طول‌های $-۱$ و ۵ هستند، پس طول قاعدهٔ AB برابر ۶ است و ارتفاع مثلث نیز برابر ۵۴ است، زیرا طول نقطهٔ رأس سهمی $x=۲$ است و داریم:

$$f(۲)=۶ \Rightarrow h=|۶-(-۴۸)|=۵۴$$

بنابراین مساحت مثلث برابر است با: $S=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۵۴=۱۶۲$ مثلث

### محور تقارن (خط تقارن) سهمی

محور تقارن سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ در واقع خط عمودی است که با محور yها موازی بوده و از رأس سهمی عبور می‌کند.

| $a>۰$ ازمون وی ای پی | $a<۰$ |
|---|---|
|  محور تقارن |  محور تقارن |

*می‌دونیم که محور تقارن یه سهمی از رأس عبور می‌کنه، پس می‌تونیم بگیم که معادله محور تقارن یه سهمی در واقع همون طول رأس سهمی رو نشون میده که اون رو برای نمایش‌های مختلف ضابطه یه سهمی توی جدول زیر براتون آماده کردیم.*

| | $f(x)=ax^۲+bx+c$ | $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ | $f(x)=a(x-h)^۲+k$ |
|---|---|---|---|
| معادله محور تقارن | $x_S=-\frac{b}{۲a}$ | $x_S=\frac{\alpha+\beta}{۲}$ | $x_S=h$ |

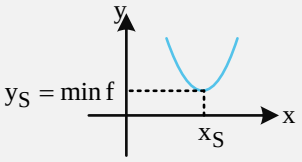
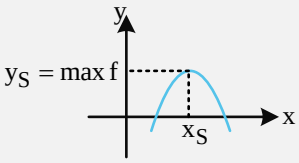
**به عنوان مثال:**

محور تقارن سهمی $f(x)=-x^2+2x-4$ به صورت $x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2(-1)}=1$ و محور تقارن سهمی $f(x)=-(x-3)^2+1$ به صورت $x_S=h=3$ است.

| عرض رأس | $y_S=f(-\frac{b}{2a})=-\frac{\Delta}{4a}$ | $y_S=f(\frac{\alpha+\beta}{2})$ | $y_S=k$ |
|---|---|---|---|

**توجه:**

توجه کنید که منظور از بیش‌ترین مقدار (max) و یا کم‌ترین مقدار (min) یک سهمی، همان عرض رأس سهمی $(y_S)$ است که با توجه به علامت a در تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$، داریم:

| $a>0$ | $a<0$ |
|---|---|
|  |  |





گروه آموزشی ماز

۱۵- تعداد جواب(های) معادلهٔ $\sqrt{2x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{4-x^2}=2$ چندتاست؟

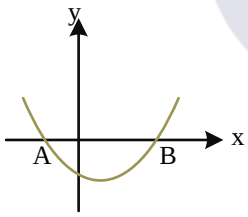
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

اگر شرط تعریف‌شدگی عبارت را در نظر بگیریم تنها $x=2$ قابل قبول خواهد شد که در معادله هم صدق می‌کند پس تنها جواب $x=2$ خواهد بود.

گروه آموزشی ماز

۱۶- نمودار تابع $f(x)=2x^2-10x+m$ در شکل مقابل رسم شده است. اگر فاصلهٔ AB برابر ۹ واحد باشد، عرض نقطهٔ رأس سهمی کدام است؟





۱) $-39$
۲) $-39/5$
۳) $-40$
۴) $-40/5$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

اگر طول‌های نقاط A و B را که همان ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ هستند، به ترتیب $x_1$ و $x_2$ بنامیم، خواهیم داشت:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{10}{2}=5 \xrightarrow{\text{پس از حل دستگاه}} x_2=7,\ x_1=-2$$

$$AB=9 \Rightarrow x_2-x_1=9$$

$$\Rightarrow P=x_1.x_2=-14=\frac{c}{a}=\frac{m}{2} \Rightarrow m=-28$$

پس معادلهٔ تابع به صورت $f(x)=2x^2-10x-28$ است که عرض نقطهٔ رأس سهمی برابر است با:

$$y_{min}=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{4(2)(-28)-100}{8}=-40/5$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- ۳۲۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت n درصد موجود است. اگر ۸۰ کیلوگرم نمک به آن اضافه کنیم، غلظت محلول برابر ۳۹/۲ درصد می‌شود. اگر در محلول اولیه، ۱۲۰ کیلوگرم آب را تبخیر کنیم، غلظت محلول چند درصد خواهد شد؟

۱) ۳۵/۶ ۲) ۳۶/۴ ۳) ۳۷/۶ ۴) ۳۸/۴

پاسخ: گزینه ۴ ازمون وی ای پی (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

چون در محلول اولیه غلظت برابر n درصد است، پس مقدار نمک موجود در آن برابر است با:

$$\frac{n}{۱۰۰}\times ۳۲۰ = ۳/۲n$$

حال با افزودن ۸۰ کیلوگرم نمک به آن خواهیم داشت:

$$\text{غلظت جدید} = \frac{۳/۲n+۸۰}{۳۲۰+۸۰}\times ۱۰۰ = \frac{۳/۲n+۸۰}{۴} = ۰/۸n+۲۰$$

طبق فرض مسئله باید غلظت جدید برابر ۳۹/۲ درصد باشد، پس داریم:

$$۰/۸n+۲۰ = ۳۹/۲ \Rightarrow ۰/۸n = ۱۹/۲ \Rightarrow n = \frac{۱۹۲}{۸} = ۲۴$$

پس محلول اولیهٔ آب نمک، محلول ۲۴ درصدی بوده و حال اگر ۱۲۰ کیلوگرم آب آن را تبخیر کنیم، غلظت جدید برابر است با:

$$\frac{۳/۲n}{۳۲۰-۱۲۰}\times ۱۰۰ = \frac{۳/۲\times ۲۴}{۲۰۰}\times ۱۰۰ = ۳۸/۴$$

**مسائل مربوط به غلظت:**

برای حل این مسائل بهتر است نکته‌های زیر را از درس شیمی به خاطر داشته باشیم:

غلظت یک محلول از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{غلظت یک محلول} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}}$$

اگر x گرم از یک ماده با غلظت m و y گرم از ماده دیگر با غلظت n را با هم مخلوط کنیم، غلظت مخلوط برابر است با:

$$\text{غلظت مخلوط} = \frac{xm+yn}{x+y}$$

گروه آموزشی ماز

۱۸- در کدام‌یک از سهمی‌های زیر، نقطهٔ رأس سهمی در ناحیهٔ سوم محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) $y = ۲x^۲ - ۴x + ۱$ ۲) $y = -x^۲ + ۳x + ۲$ ۳) $y = x^۲ + ۵x + ۴$ ۴) $y = -۲x^۲ - ۶x + ۳$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

برای این‌که نقطهٔ رأس سهمی در ناحیهٔ سوم محورهای مختصات قرار داشته باشد، باید طول و عرض نقطهٔ رأس، منفی باشند، مختصات رأس سهمی به صورت $S(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a})$ است، بنابراین داریم:

**بررسی گزینه‌ها:**

۱) $y = ۲x^۲ - ۴x + ۱ \Rightarrow x_S = ۲ > ۰$

۲) $y = -x^۲ + ۳x + ۲ \Rightarrow x_S = \frac{۳}{۲} > ۰$

۳) $y = x^۲ + ۵x + ۴ \Rightarrow x_S = \frac{-۵}{۲} < ۰$

$$y_S = \frac{-\Delta}{۴a} = \frac{۱۶-۲۵}{۴} = -\frac{۹}{۴} < ۰ \Rightarrow S(-\frac{۵}{۲}, -\frac{۹}{۴})$$

۴) $y = -۲x^۲ - ۶x + ۳ \Rightarrow x_S = \frac{۶}{-۴} = -\frac{۳}{۲} < ۰$

$$y_S = \frac{-۲۴-۳۶}{-۸} = \frac{۱۵}{۲} > ۰$$

۱۹- اگر اعداد حقیقی و مثبت $a$ و $b$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-(۳a-۱)x+۳b=۰$ باشند، حاصل $۳a-۲b$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱ ۳) $-۱$ ۴) $-۹$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

چون $a$ و $b$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-(۳a-۱)x+۳b=۰$ هستند، پس داریم:

$$S=a+b=\frac{۳a-۱}{۱}\Rightarrow a+b=۳a-۱\Rightarrow ۲a-b=۱\quad (۱)$$

$$P=ab=\frac{۳b}{۱}\Rightarrow ab=۳b\xrightarrow{b\neq ۰}a=۳\xrightarrow{(۱)}۶-b=۱\Rightarrow b=۵$$

$$\Rightarrow ۳a-۲b=۳(۳)-۲(۵)=-۱$$

گروه آموزشی ماز

۲۰- فاصلهٔ بین رأس‌های دو سهمی $f(x)=x^۲-۴x+m$ و $g(x)=x^۲+۲x+۳$ برابر $\sqrt{۳۴}$ است. کوچک‌ترین مقدار $m$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) $-۱$ ۳) $-۱۱$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

$$f(x)=x^۲-۴x+m\Rightarrow \text{رأس سهمی } A(۲,m-۴)$$

$$g(x)=x^۲+۲x+۳\Rightarrow \text{رأس سهمی } B(-۱,۲)$$

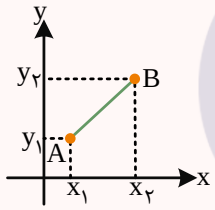
$$AB=\sqrt{۳۴}\Rightarrow\sqrt{۹+(m-۶)^۲}=\sqrt{۳۴}\Rightarrow ۹+(m-۶)^۲=۳۴\Rightarrow(m-۶)^۲=۲۵\Rightarrow m-۶=\pm۵\Rightarrow\begin{cases}m=۱۱\\m=۱\end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین مقدار $m$ برابر ۱ است.

**فاصله دو نقطه**

برای به دست آوردن فاصلهٔ دو نقطه به مختصات $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

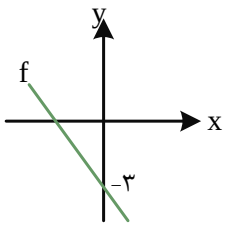



$$AB=\sqrt{(\text{اختلاف طول‌ها})^۲+(\text{اختلاف عرض‌ها})^۲}$$

*برای به خاطر سپاری بهتر اینبوری ببینید، بهتره:*

گروه آموزشی ماز

۱- نمودار تابع خطی f شکل روبه‌رو است. اگر $fof(1)=7$، مقدار $fof(-2)$ چه عددی است؟




۱) $-5$
۲) $-7$
۳) $-3$
۴) $-4$

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

$f(x)=mx-3 \Rightarrow fof(x)=m(mx-3)-3$

$fof(1)=7 \Rightarrow fof(1)=m^2-3m-3$

$m^2-3m-3=7 \Rightarrow m^2-3m-10=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=5 \end{cases}$ غ ق ق

چون $m<0$، پس $m=-2$.

$f(x)=-2x-3$

$fof(-2)=f\big(f(-2)\big)=f(1)=-5$

گروه آموزشی ماز

۲- اگر $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+3}+bx^3 & |x|\geq 1 \\ 3x^3+ax^2 & |x|\leq 1 \end{cases}$ بیانگر تابع باشد، مقدار $f(-a)$ چه عددی است؟

۱) $\sqrt{7}+24$
۲) $\sqrt{7}-24$
۳) $16$
۴) $-16$

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۵)

چون قرار است $f(x)$ تابع باشد، پس باید مقدار تابع به ازاء $x=1$ و $x=-1$ از بالا و پایین با هم برابر باشند، یعنی:

$f(1)=2+b=3+a \Rightarrow b-a=1$

$f(-1)=2-b=-3+a \Rightarrow b+a=5$ $\Rightarrow b=3,\ a=2$

$f(-a)=f(-2)=\sqrt{7}-24$

گروه آموزشی ماز

۳- هرگاه $f=\{(n,2),(2,n^2),(n+1,2n),(2,n+2)\}$ تابع باشد، مقدار $fof(-1)$ چه عددی است؟

۱) $-2$
۲) $2$
۳) صفر
۴) $1$

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

چون f تابع است، پس:

$\begin{matrix} (2,n^2)\in f \\ (2,n+2)\in f \end{matrix} \Rightarrow n^2=n+2 \Rightarrow \begin{cases} n=2 \\ n=-1 \end{cases}$

$n=2: f=\{(2,2),(2,4),(3,4),(2,4)\}$ غ ق ق، زیرا f تابع نیست.

$n=-1: f=\{(-1,2),(2,1),(0,-2),(2,1)\} \Rightarrow f=\{(-1,2),(2,1),(0,-2)\}$

$fof(-1)=f(2)=1$

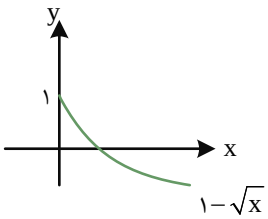
گروه آموزشی ماز

۴- تابع $f(x)=\begin{cases} 1-\sqrt{x} & x\geq 0 \\ k-x & x<0 \end{cases}$ یک‌به‌یک است، حدود k کدام است؟

۱) $k\leq -1$
۲) $-1\leq k\leq 1$
۳) $k\geq 1$
۴) $|k|\geq 1$

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

به کمک نمودار داریم:




کافی است $k \geq 1$، زیرا $y = k - x$ نزولی اکید است و کافی است عرض از مبدأ آن از بزرگ‌تر مساوی با ۱ باشد.

گروه آموزشی ماز

۵- اگر $D_g = [-3,2]$ و $D_{f+g} = [-2,1]$، دامنهٔ تعریف تابع $y = 2f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $[-3,1]$ ۲) $[-2,1]$ ۳) $[-2,2]$ ۴) $[-3,-2]$

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

می‌دانیم $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ در واقع برای یافتن $D_{2f}$ یا همان $D_f$ کافی است از تساوی مقابل کمک بگیریم که: $[-3,2] \cap D_f = [-2,1]$

دامنهٔ تعریف تابع f می‌تواند بازه $[-2,1]$ باشد، پس تنها گزینه قابل قبول، گزینه ۲ است.

گروه آموزشی ماز

۶- اگر $f(x) = 1 - \sqrt{1-x}$ به طوری که $f^{-1}(x) = ax^2 + bx$، مقدار ab کدام است؟

۱) $-4$ ۲) ۴ ۳) $-2$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

**روش اول:**

$$y = 1 - \sqrt{1-x} \Rightarrow 1 - y = \sqrt{1-x}$$

$$y^2 - 2y + 1 = 1 - x \Rightarrow x = 2y - y^2$$

$$f^{-1}(x) = 2x - x^2 \xrightarrow{x \leq 1} a = -1, b = 2 \Rightarrow ab = -2$$

**روش دوم:**

می‌توانیم با انتخاب ۲ عدد مناسب از دامنه f، a و b را بیابیم.

$$\begin{cases} f(1) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1 \\ f(-3) = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = -3 \Rightarrow a - b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = +2 \end{cases} \Rightarrow ab = -2$$

**نکات طلایی تابع وارون!**

اگر در نمایش زوج‌مرتبی یک تابع، جای مولفه اول و دوم را در همه زوج‌مرتب‌ها با هم عوض کنیم، مجموعهٔ جدیدی به دست می‌آید که آن را وارون تابع f می‌گوییم و با $f^{-1}$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که وارون یک تابع، ممکن است تابع نباشد.

**توجه!**

اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد، در این صورت، وارون‌پذیر است و بالعکس، یعنی اگر تابعی وارون‌پذیر باشد می‌توان نتیجه گرفت که آن تابع یک‌به‌یک است.

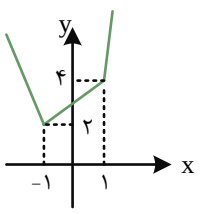
گروه آموزشی ماز

۷- تابع $f(x) = |x+1| + 2|x-1|$، فقط در بازه $[\alpha, +\infty)$ صعودی اکید است. حداقل $\alpha$ کدام است؟

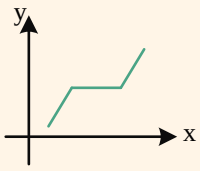
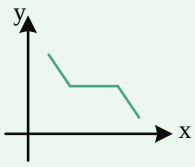
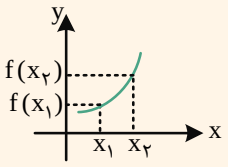
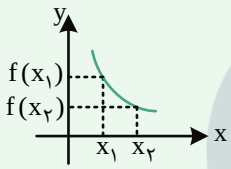
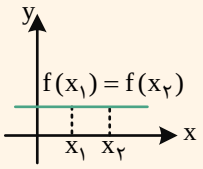
۱) ۱ ۲) $-1$ ۳) ۲ ۴) $-2$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

با رسم نمودار تابع f مشخص می‌شود، تابع در بازه $[-1,+\infty)$ صعودی اکید است، پس حداقل $\alpha$ برابر $-1$ است.



**هر آنچه باید درباره «توابع یکنوا» بدانید!**

| تابع | توضیح | تعریف ریاضی | مثال نموداری |
|---|---|---|---|
| صعودی | با افزایش x، مقدار تابع f(x) افزایش می‌یابد و یا اینکه ثابت می‌ماند. | $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ |  |
| نزولی | با افزایش x، مقدار تابع f(x) کاهش می‌یابد و یا اینکه ثابت می‌ماند. | $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$ |  |
| اکیداً صعودی | با افزایش x، مقدار تابع f(x) همواره افزایش می‌یابد. | $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ |  |
| اکیداً نزولی | با افزایش x، مقدار تابع f(x) همواره کاهش می‌یابد. | $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ |  |
| تابع ثابت (هم صعودی و هم نزولی) | با افزایش x، مقدار تابع f(x) همواره ثابت است. | $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$ |  |

**توجه!**

به تابعی که نه **صعودی** و نه **نزولی** باشد، تابع **غیریکنوا** می‌گوییم. به عبارت دیگر تابع غیریکنوا تابعی است که در دامنهٔ تعریف خود در بازه‌هایی صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد.

گروه آموزشی ماز

۸- اگر نقطهٔ $A(2a,a)$ روی وارون تابع $f(x)=\frac{ax}{x-1}$ باشد، مقدار a چه عددی می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) $-2$ ۳) ۴ ۴) $-4$

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

چون $A(2a,a)$ روی وارون تابع $f(x)=\frac{ax}{x-1}$ قرار گرفته است، پس $A'(a,2a)$ روی نمودار f واقع شده است، پس:

$$2a=\frac{a^2}{a-1} \Rightarrow 2=\frac{a}{a-1} \quad , a \neq 0$$

$$2a-2=a \Rightarrow a=2$$

۹- دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱}{\sqrt{۴-x}}-۲}$ بازهٔ $[\alpha,\beta)$ است. مقدار $\alpha\beta$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۵ ۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) ۱۷

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۵)

$$۴-x>۰\Rightarrow x<۴,\ \frac{۱}{\sqrt{۴-x}}\geq ۲\Rightarrow \frac{۱}{۴-x}\geq ۴\xrightarrow{۴-x>۰} ۴-x\leq \frac{۱}{۴}\Rightarrow x\geq \frac{۱۵}{۴}$$

$$D_f=[\frac{۱۵}{۴},۴)\Rightarrow \alpha\beta=۱۵$$

### ایستگاه دامنهٔ توابع رادیکالی

برای پیدا کردن دامنه توابع رادیکالی، با توجه به فرجه رادیکال داریم:

▲ اگر فرجه رادیکال **فرد** باشد، دامنه تابع با دامنه عبارت زیر رادیکال برابر است. به عبارت دیگر، رادیکال فرجه فرد را نادیده می‌گیریم و فقط دامنه عبارت زیر رادیکال را به دست می‌آوریم.

$$f(x)=\sqrt[\text{فرد}]{g(x)}\Rightarrow D_f=D_g$$

▲ اگر فرجه رادیکال **زوج** باشد، برای پیدا کردن دامنه تابع، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱. دامنه عبارت زیر رادیکال را به دست می‌آوریم $(D_g)$.

۲. عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم و مجموعه جواب آن را به دست می‌آوریم $(g(x)\geq ۰)$، دقت کنید که اگر رادیکال با فرجه زوج در مخرج کسر باشد، باید عبارت زیر رادیکال رو بزرگ‌تر از صفر بذاریم. *ضب معلومه دیگه، مخرج کسر که نمیتونه صفر باشه!*

۳. از محدوده‌های به دست آمده در مراحل ۱ و ۲، **اشتراک** می‌گیریم.

$$f(x)=\sqrt[\text{زوج}]{g(x)}\Rightarrow D_f=\{x\,|\,x\in D_g, g(x)\geq ۰\}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- هرگاه $f(x)=\frac{x}{۲x+۱}$ باشد، تابع $y=fof(x)$ خط $y=-۲x$ را در نقاط $A$ و $B$ قطع می‌کند. طول پاره‌خط $AB$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۸}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۶۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۱۶}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

$$fof(x)=\frac{f(x)}{۲f(x)+۱}=\frac{\frac{x}{۲x+۱}}{\frac{۲x}{۲x+۱}+۱}=\frac{x}{۴x+۱}$$

$$fof(x)=-۲x\Rightarrow \frac{x}{۴x+۱}=-۲x\Rightarrow \begin{cases} x=۰\ ,\ A\Big|_{۰}^{۰} \\ ۴x+۱=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=-\frac{۳}{۸}\ ,\ B\Big|_{\frac{۳}{۴}}^{-\frac{۳}{۸}} \end{cases}$$

$$AB=\sqrt{\frac{۹}{۶۴}+\frac{۳۶}{۶۴}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۸}$$

### فاصلهٔ دو نقطه از یکدیگر چه فرمولی داشت؟

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A\Big|_{y_۱}^{x_۱}$ و $B\Big|_{y_۲}^{x_۲}$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

۱۱- هرگاه $f(x)=[x]-۲x$ و $g(x)=f([x+f(x)])$، مقدار $gof(-\frac{۵}{۳})$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

$$f(-\frac{۵}{۳})=\left[-\frac{۵}{۳}\right]+\frac{۵}{۳}\times ۲=-۲+\frac{۱۰}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow gof(-\frac{۵}{۳})=g(\frac{۴}{۳})=f\left(\left[\frac{۴}{۳}+f\left(\frac{۴}{۳}\right)\right]\right)=f\left(\left[\frac{۴}{۳}+\left[\frac{۴}{۳}\right]-\frac{۸}{۳}\right]\right)=f\left(\left[۱-\frac{۴}{۳}\right]\right)=f\left(\left[-\frac{۱}{۳}\right]\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\left[-\frac{۱}{۳}\right]\right)=f(-۱)=-۱+۲=۱$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- تابع $f(x)=\frac{ax+b}{x+۳}$ وارون خودش را در نقاطی به طول ۱- و ۳ قطع می‌کند، مقدار $f^{-۱}(۶)$ چه عددی است؟

۱) ۱۵ ۲) ۶- ۳) ۶ ۴) ۱۵-

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

**جرقه ذهنی**

تابع هموگرافیک وارون خودش را فقط روی نیمساز ناحیه اول و سوم قطع می‌کند.

$$f(-۱)=-۱\Rightarrow\frac{-a+b}{۲}=-۱\Rightarrow b-a=-۲$$

$$f(۳)=۳\Rightarrow\frac{۳a+b}{۶}=۳\Rightarrow ۳a+b=۱۸$$

$$-\begin{cases}b-a=-۲\\ ۳a+b=۱۸\end{cases}\Rightarrow ۴a=۲۰\Rightarrow a=۵\ ,\ b=۳$$

$$f(x)=\frac{۵x+۳}{x+۳}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-۳x+۳}{x-۵}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(۶)=\frac{-۱۸+۳}{۱}=-۱۵$$

**f و $f^{-۱}$ کجا همدیگر رو قطع می‌کنن؟!**

۱) اگر تابع f **صعودی باشد**، در این صورت نقاط برخورد دو تابع f و $f^{-۱}$ روی **نیمساز ناحیه اول و سوم** $(y=x)$ قرار دارند، بنابراین برای پیدا کردن طول نقطه (نقاط) برخورد، معادله $f(x)=x$ را حل می‌کنیم.

۲) اگر تابع f، تابعی **صعودی نباشد**، در این صورت، ابتدا ضابطه تابع $f^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم و سپس با حل **معادله** $f^{-۱}(x)=f(x)$، طول نقطه (نقاط) برخورد را پیدا می‌کنیم. (توجه کنید که در این حالت، برای حل معادله $f^{-۱}(x)=f(x)$، از روش رسم هندسی هم می‌توانیم استفاده کنیم.)

**تذکر!**

در این تیپ سوالات، اگر به‌دست آوردن ضابطهٔ وارون تابع سخت باشد، بهتر است از راه‌های دیگری همچون یکنوایی توابع استفاده کنید.

۱۳- اگر $x \geq ۲$ و $f(x)=۲x^۲-۸x-۱$ و $g(x)=\frac{۵x-۳}{۲}$، مقدار $g^{-۱}of^{-۱}(\frac{-۹}{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

$$f^{-۱}(-\frac{۹}{۲})=\alpha \Rightarrow f(\alpha)=-\frac{۹}{۲}$$

$$۲\alpha^۲-۸\alpha+\frac{۷}{۲}=۰ \Rightarrow (۲\alpha-۷)(\alpha-\frac{۱}{۲})=۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{۷}{۲} \\ \alpha=\frac{۱}{۲} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$g^{-۱}of^{-۱}(-\frac{۹}{۲})=g^{-۱}(\frac{۷}{۲})$$

$$g^{-۱}(\frac{۷}{۲})=\beta \Rightarrow g(\beta)=\frac{۷}{۲} \Rightarrow \frac{۵\beta-۳}{۲}=\frac{۷}{۲} \Rightarrow \beta=۲$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- هرگاه $fog(x)=۲-۳x$ و $g^{-۱}(x)=\frac{۲x}{x-۳}$، مقدار $f^{-۱}(-۳)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۷}$ ۲) $-۱۵$ ۳) ۱ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

در ضابطه $fog(x)=۲-۳x$، به جای $x$ قرار می‌دهیم $g^{-۱}(x)$، پس:

$$fog(g^{-۱}(x))=۲-۳g^{-۱}(x)$$

$$f(x)=۲-۳\times\frac{۲x}{x-۳}=۲-\frac{۶x}{x-۳}=\frac{-۴x-۶}{x-۳}$$

$$f(x)=\frac{۴x+۶}{-x+۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-۳x+۶}{-x-۴}=\frac{۳x-۶}{x+۴}$$

نکته‌ای به رنگ طلا

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$f^{-۱}(-۳)=\frac{-۹-۶}{۱}=-۱۵$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- هرگاه $f(x)=\sqrt{x-۱}-۲\sqrt{۹-x}$، جواب نامعادلهٔ $f(۴-۲x) \leq f(x+۱)$ کدام است؟

۱) $۱ \leq x \leq \frac{۳}{۲}$ ۲) $۱ \leq x \leq ۸$ ۳) $-\frac{۵}{۲} \leq x \leq \frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۵}{۲} \leq x \leq ۸$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

f با دامنهٔ $D_f=[۱,۹]$ تابعی صعودی اکید است به طوری که:

$$x+۱ \in D_f \Rightarrow ۱ \leq x+۱ \leq ۹ \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۸$$

$$۴-۲x \in D_f \Rightarrow ۱ \leq ۴-۲x \leq ۹ \Rightarrow \frac{-۵}{۲} \leq x \leq \frac{۳}{۲}$$

از طرفی، چون f صعودی اکید است، پس:

$$۴-۲x \leq x+۱ \Rightarrow x \geq ۱$$

پس در کل $۱ \leq x \leq \frac{۳}{۲}$ جواب نهایی است.

۱۶- اگر وارون تابع $f(x)=x^۳+۲x^۲+ax+۶$، خط $۴x+y=۳$ را در نقطه‌ای به عرض $-۱$ قطع کند، مقدار $a$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) $-۴$ ۴) $-۶$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

$y=-۱$ و $۴x+y=۳$، پس $x=۱$، یعنی $A(۱,-۱)$ روی وارون تابع است و $A'(-۱,۱)$ روی نمودار $y=f(x)$ خواهد بود، پس:

$$f(-۱)=۱ \Rightarrow -۱+۲-a+۶=۱ \Rightarrow a=۶$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- اگر $f(x)=x^۲-[x]$ به طوری که $f\left(af(\sqrt{۳})\right)=۶$، مقدار $a$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

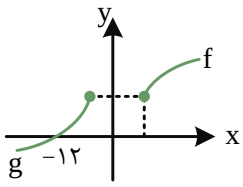
ابتدا $f(\sqrt{۳})$ را به دست آورده و آن را جایگزین می‌کنیم:

$$f(\sqrt{۳})=۳-۱=۲ \Rightarrow f(۲a)=۶$$
$$۴a^۲-[۲a]=۶$$

با توجه به گزینه‌های موجود $a=\sqrt{۲}$ قابل قبول است.

گروه آموزشی ماز

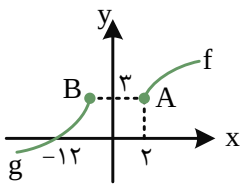
۱۸- نمودار توابع $f(x)=۳+\sqrt{x-۲}$ و $g(x)=a-\sqrt{b-x}$ شکل مقابل است. حاصل $a+b$ کدام است؟




۱) ۴
۲) ۵
۳) ۷
۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۵)

با توجه به نمودار $y=f(x)$ نقطه ابتدایی نمودار $f$ نقطه $A\begin{vmatrix}۲\\۳\end{vmatrix}$ است، پس فرض می‌کنیم $B\begin{vmatrix}\alpha\\۳\end{vmatrix}$ یعنی $a=۳$، از طرفی:




$$g(-۱۲)=۰ \Rightarrow ۳-\sqrt{b+۱۲}=۰ \Rightarrow \sqrt{b+۱۲}=۳ \Rightarrow b=-۳$$
$$\Rightarrow a+b=۰$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۴x+۱۶}$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده‌ایم و سپس ۶ واحد به بالا و $k$ واحد به سمت چپ انتقال داده‌ایم به طوری که نمودار حاصل تابع $y=f(x)$ را روی محور عرض‌ها قطع کرده است، مقدار $k$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

تغییرات بیان شده را به ترتیب بر روی تابع $f$ اثر می‌دهیم و داریم:

$$\sqrt{۴x+۱۶} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -\sqrt{-۴x+۱۶} \xrightarrow[k\text{ واحد به چپ}]{۶\text{ واحد به بالا}} ۶-\sqrt{-۴(x+k)+۱۶}=g(x)$$

حال تابع به دست آمده به ازاء $x=۰$ و $f(۰)$ با هم برابرند، پس:

$$g(۰)=۶-\sqrt{۱۶-۴k}$$
$$f(۰)=۴$$
$$\Rightarrow ۶-\sqrt{۱۶-۴k}=۴ \Rightarrow \sqrt{۱۶-۴k}=۲ \Rightarrow ۱۶-۴k=۴ \Rightarrow ۴k=۱۲ \Rightarrow k=۳$$

### ۱) به سرزمین «تبدیلات تابع» خوش آمدید!

برای تابع $f(x)$ داریم:

۱) $f(x+k) \Rightarrow \begin{cases} k>0 \rightarrow \text{k واحد در جهت افقی به چپ} \\ k<0 \rightarrow \text{|k| واحد در جهت افقی به راست} \end{cases}$

۲) $f(x)+k \Rightarrow \begin{cases} k>0 \rightarrow \text{k واحد در جهت عمودی به بالا} \\ k<0 \rightarrow \text{|k| واحد در جهت عمودی به پایین} \end{cases}$

۳) $kf(x) \Rightarrow \begin{cases} k>1 \rightarrow \text{انبساط عمودی با ضریب k} \\ 0<k<1 \rightarrow \text{انقباض عمودی با ضریب k} \end{cases}$

۴) $-f(x) \rightarrow$ قرینه نسبت به محور x ها

۵) $f(kx) \Rightarrow \begin{cases} k>1 \rightarrow \text{انقباض افقی با ضریب } \frac{1}{k} \\ 0<k<1 \rightarrow \text{انبساط افقی با ضریب } \frac{1}{k} \end{cases}$

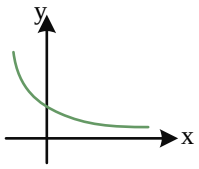
۶) $f(-x) \rightarrow$ قرینه نسبت به محور yها

### ۲) دامنهٔ تابع مرکب چی میشه؟

دامنهٔ تابع $h(x)=fog(x)$ برابر است با: $\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

## گروه آموزشی ماز

۲۰- اگر $f(x)=a^x$ $(a \in \mathbb{N})$ و $g(x)=(\frac{1}{3})^x$ توابع نمایی و نمودار $f.g$ به صورت مقابل باشد، حاصل $f.g(-2)$ چقدر است؟




۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۲۵
۴) ۲/۵

**پاسخ: گزینه ۳** (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

با توجه به نمودار تابع $f.g=(\frac{a}{3})^x$ مشخص می‌شود که $0<\frac{a}{3}<1$ است، بنابراین:

$$0<a<3 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} \begin{cases} a=1 \text{ غ ق ق} \ (f(x)=1^x \text{ نمایی نیست}) \\ a=2 \checkmark \end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$f.g(x)=(\frac{2}{3})^x \Rightarrow (f.g)(-2)=(\frac{2}{3})^{-2}=\frac{9}{4}=2/25$$

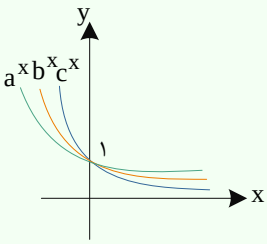
**هر آنچه دربارهٔ نمودارهای توابع نمایی نیاز هست بدانید!**

مقایسه نمودارهای $f(x)=a^x$ و $g(x)=b^x$ و $h(x)=c^x$ :

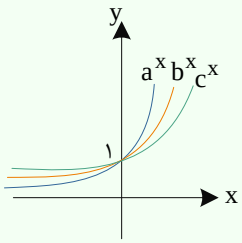
۱) $x>0 \rightarrow f(x)>g(x)>h(x)$

۲) $x=0 \rightarrow f(x)=g(x)=h(x)=1$

۳) $x<0 \rightarrow f(x)<g(x)<h(x)$




$0<c<b<a<1$




$1<c<b<a$

به عبارت دیگر در xهای مثبت هر چه **پایه بزرگ‌تر** باشه، نمودار تابع **بالاتر** قرار می‌گیره و در xهای منفی، هر چه **پایه بزرگ‌تر** باشه نمودار تابع **پایین‌تر** قرار می‌گیره.

گروه آموزشی ماز

**۲۱- اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $9^x-3^{x+1}=3(3^{x-1}-1)$ باشند، بیشترین مقدار $3^{\alpha}\times 9^{\beta}$ چقدر است؟**

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۲۷

**پاسخ: گزینه ۳** (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$9^x-3^{x+1}=3(3^{x-1}-1)\Rightarrow 9^x-3\times 3^x=3^x-3\Rightarrow 9^x-4\times 3^x+3=0$$

اگر $3^x=k$ باشد، خواهیم داشت:

$$k^2-4k+3=0\Rightarrow \begin{cases}k=1\\k=3\end{cases}$$

دو حالت وجود دارد:

**حالت اول:**

$$\begin{cases}3^{\alpha}=1\\3^{\beta}=3\Rightarrow 9^{\beta}=9\end{cases}\Rightarrow 3^{\alpha}\times 9^{\beta}=9$$

**حالت دوم:**

$$\begin{cases}3^{\alpha}=3\\3^{\beta}=1\Rightarrow 9^{\beta}=1\end{cases}\Rightarrow 3^{\alpha}\times 9^{\beta}=3$$

بنابراین بیشترین مقدار $3^{\alpha}\times 9^{\beta}$ برابر ۹ است.

گروه آموزشی ماز

**۲۲- معادلهٔ $\log_2^{(x+4)}+\log_2^{|x+1|}=2$ دارای چند جواب است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ: گزینه ۲** (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

$$\log_2^{(x+4)|x+1|}=2\Rightarrow |x+1|(x+4)=4$$

$$\begin{cases}x>-1\Rightarrow (x+1)(x+4)=4\Rightarrow x^2+5x=0\Rightarrow \begin{cases}x=0\ \checkmark\\x=-5\ \text{غ ق ق}\end{cases}\\x<-1\Rightarrow -(x+1)(x+4)=4\Rightarrow x^2+5x+8=0\xrightarrow{\Delta<0}\text{بدون جواب}\end{cases}$$

بنابراین $x=0$ تنها جواب معادله است.

۲۳- اگر $2\log(\sqrt{7-2\sqrt{10}}+k)=1-\log 2$ باشد، $\log_4^k$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

**پاسخ: گزینه ۳** (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

معادله را ساده می‌کنیم:

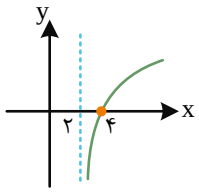
$$2\log(\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}+k)=\log 5 \Rightarrow \log(\sqrt{5}-\sqrt{2}+k)=\frac{1}{2}\log 5=\log\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}-\sqrt{2}+k=\sqrt{5} \Rightarrow k=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \log_4^k=\log_4^{\sqrt{2}}=\frac{1}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- نمودار تابع $f(x)=a+\log_2^{(x+b)}$ به صورت مقابل است. $f(6)$ چقدر است؟




۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

**پاسخ: گزینه ۲** (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$$x+b>0 \Rightarrow x>-b$$

با توجه به نمودار $-b=2$ و در نتیجه $b=-2$ است.

$$f(4)=0 \Rightarrow a+\log_2^{(4-2)}=0 \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

$$f(x)=-1+\log_2^{(x-2)} \Rightarrow f(6)=-1+\log_2^4=-1+2=1$$

خواهیم داشت:

**دامنه لگاریتم چطوری به دست می‌آید؟**

برای به‌دست آوردن دامنه تابع $y=\log_{g(x)}^{f(x)}$، باید شروط زیر را بررسی کنیم:

۱) $f(x)>0$ (عبارت جلوی لگاریتم مثبت باشه) ۲) $g(x)>0$ (مبنای لگاریتم مثبت باشه) ۳) $g(x)\neq 1$ (مبنای لگاریتم یک نباشه)

پس از حل نامساوی‌های بالا، برای به دست آوردن دامنه، بین جواب‌های به‌دست آمده **اشتراک** می‌گیریم، به عبارتی دیگر:

$$y=\log_{g(x)}^{f(x)} \quad D_y:\{x \mid f(x)>0, g(x)>0, g(x)\neq 1\}$$

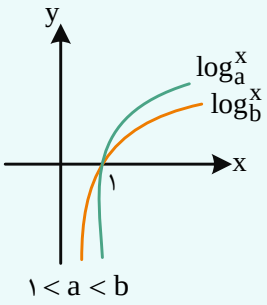
**تغییر مبنا چطوری نمودار log رو عوض می‌کنه؟**

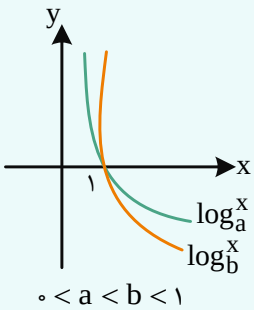
مقایسه نمودارهای توابع $f(x)=\log_a^x$ و $g(x)=\log_b^x$:

۱) $x>1 \rightarrow f(x)>g(x)$

۲) $x=1 \rightarrow f(x)=g(x)$

۳) $0<x<1 \rightarrow f(x)<g(x)$




به عبارت دیگر در $x>1$ هر چه مبنا **بزرگ‌تر** باشه، نمودار اون **پایین‌تر** قرار می‌گیره و در $0<x<1$، هر چه مبنا **بزرگ‌تر** باشه، نمودار اون **بالاتر** قرار می‌گیره.

گروه آموزشی ماز

۲۵- جرم یک نوع مادهٔ رادیواکتیو هر ۱۰ سال نصف می‌شود. اگر ۶ کیلوگرم از این ماده موجود باشد، پس از چند سال جرم آن ۲ کیلوگرم است؟ $(\log ۳ \simeq ۰/۴۸, \log ۲ \simeq ۰/۳)$

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

$$f(t) = A_{۰} k^{\frac{t}{m}} \Rightarrow f(t) = ۶ \times (\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۱۰}} \Rightarrow ۲ = ۶ \times (\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۱۰}}$$

$$\Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۱۰}} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \log(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۱۰}} = \log(\frac{۱}{۳}) \Rightarrow -\frac{t}{۱۰}\log ۲ = -\log ۳$$

$$\Rightarrow \frac{t}{۱۰} = \frac{\log ۳}{\log ۲} \Rightarrow \frac{t}{۱۰} = \frac{۰/۴۸}{۰/۳} \Rightarrow t = ۱۶$$

**مقدار یک ماده با گذشت زمان چجوری کم می‌شه؟! باید رادیواکتیو باشه!**

اگر مقدار اولیه $A_{۰}$ بعد از گذشت m واحد زمانی k برابر شود، مقدار آن بعد از t واحد زمانی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$A_{۰}$ = مقدار در لحظه شروع

$f(t)$ = مقدار پس از گذشته t واحد زمانی

$$f(t) = A_{۰} k^{\frac{t}{m}}$$

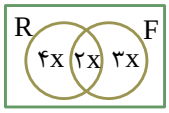
گروه آموزشی ماز

۱- در یک کلاس ۳۰ نفره، تعداد علاقمندان به ریاضی ۳ برابر علاقمندان به فیزیک و ریاضی و ۲ برابر کسانی است که فقط به فیزیک علاقمندند. در این کلاس حداقل چند نفر نه به ریاضی علاقمندند و نه به فیزیک؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

نمودار ون به صورت مقابل است:




بنابراین تعداد افرادی که نه به ریاضی علاقمندند و نه به فیزیک برابر $۳۰-۹x$ است.

کمترین مقدار $۳۰-۹x$ زمانی است که $x=۳$ باشد و در نتیجه $۳۰-۹x=۳$ است.

گروه آموزشی ماز

۲- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع جملات دوم و پنجم، هشت برابر مجموع جملات پنجم و هشتم است. اگر جملهٔ چهارم برابر ۱ باشد، جملهٔ ششم کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

می‌دانیم: $\frac{a_۲+a_۵}{a_۵+a_۸}=۸ \Rightarrow \frac{aq+aq^۴}{aq^۴+aq^۷}=۸ \Rightarrow \frac{aq(۱+q^۳)}{aq^۴(۱+q^۳)}=۸ \Rightarrow \frac{۱}{q^۳}=۸ \Rightarrow q=\frac{۱}{۲}$

از طرفی: $a_۴=۱ \Rightarrow a_۶=a_۴\times q^۲=۱\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$

گروه آموزشی ماز

۳- بین دو عدد ۲ و $k$ و با شروع از ۲، پنج واسطهٔ حسابی درج می‌کنیم. اگر جملات دوم، سوم و پنجم درج شده تشکیل دنبالهٔ هندسی غیرثابت دهند، $k$ چند برابر جملهٔ دوم درج شده است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $-۴$ ۴) $-۵$

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

دنبالهٔ حسابی به وجود آمده به صورت مقابل است: $۲,-,-,-,-,-,k$

در این صورت جملات دوم، سوم و پنجم درج شده همان جملات سوم، چهارم و ششم دنباله حسابی می‌باشند که تشکیل دنبالهٔ هندسی داده‌اند.

$a_۳,a_۴,a_۶ \Rightarrow a_۴^۲=a_۳a_۶$

$\Rightarrow (۲+۳d)^۲=(۲+۲d)(۲+۵d) \Rightarrow d^۲+۲d=۰ \Rightarrow \begin{cases} d=۰ \text{ غ ق ق} & \text{(دنباله غیرثابت است)} \\ d=-۲ \checkmark \end{cases}$

خواهیم داشت: $۲,۰,-۲,-۴,-۶,-۸,-۱۰$

$k$ برابر $-۱۰$ و جملهٔ دوم درج شده $-۲$ است. $\frac{-۱۰}{-۲}=۵$

گروه آموزشی ماز

۴- حاصل عبارت $A=\frac{۱۵}{۲\sqrt[۳]{۲}-۱}-۴\sqrt[۳]{۴}+۱$ چقدر است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $۲\sqrt[۳]{۲}$ ۳) $۳\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $۴\sqrt[۳]{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

ابتدا کسر $\frac{۱۵}{\sqrt[۳]{۲}-۱}$ را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۱۵}{\sqrt[۳]{۲}-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{۱۵(\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱)}{۱۶-۱}=\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱$$

بنابراین:

$$A=\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱-\sqrt[۳]{۴}-۱=\sqrt[۳]{۲}$$

**۵- حاصل $P=\sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}\times۴^{-\frac{۱}{۳}}$ کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲}}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲^۵}}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt[۱۲]{۲}}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt[۱۲]{۳^۵}}$

**پاسخ: گزینه ۱** (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

می‌دانیم:

$$\sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}=\sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۲\times۲^{\frac{۱}{۲}}}}=\sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۲^{\frac{۳}{۲}}}}=\sqrt[۵]{۴\times۲^{\frac{۱}{۲}}}=\sqrt[۵]{۲^۲\times۲^{\frac{۱}{۲}}}=\sqrt[۵]{۲^{\frac{۵}{۲}}}=۲^{\frac{۱}{۲}}$$

بنابراین:

$$P=۲^{\frac{۱}{۲}}\times۴^{-\frac{۱}{۳}}=۲^{\frac{۱}{۲}}\times۲^{-\frac{۲}{۳}}=۲^{-\frac{۱}{۶}}=\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲}}$$

گروه آموزشی ماز

**۶- حاصل عبارت $(x-۶)(x^۲+۱۲)$ به ازای $x=\sqrt[۳]{۶۵}+۲$ چقدر است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

**پاسخ: گزینه ۲** (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

ابتدا عبارت $(x-۶)(x^۲+۱۲)$ را به صورت مکعب کامل می‌نویسیم:

$$A=(x^۲+۱۲)(x-۶)=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۷۲=(x-۲)^۳-۶۴$$

اگر $x=\sqrt[۳]{۶۵}+۲$ باشد، خواهیم داشت:

$$A=(\sqrt[۳]{۶۵}+۲-۲)^۳-۶۴=۶۵-۶۴=۱$$

گروه آموزشی ماز

**۷- خطی که از نقطهٔ تلاقی دو خط $۳y-۴x=۱۸$ و $۲y+x=۱$ می‌گذرد و بر خط $۲y=-x+۱۱$ عمود است، از کدام نقطه عبور می‌کند؟**

۱) $(۱,۶)$ ۲) $(۱,۱۰)$ ۳) $(-۱,-۶)$ ۴) $(-۱,-۱۰)$

**پاسخ: گزینه ۲** (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

برای تعیین نقطهٔ تلاقی دو خط $۳y-۴x=۱۸$ و $۲y+x=۱$، کافی است دستگاه حاصل از آن‌ها را حل کنیم:

$$\begin{cases}۳y-۴x=۱۸\\۲y+x=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳y-۴x=۱۸\\۸y+۴x=۴\end{cases}\Rightarrow ۱۱y=۲۲\Rightarrow y=۲$$

$$\Rightarrow x=-۳\Rightarrow \text{مختصات نقطه تلاقی } A(-۳,۲)$$

از طرفی شیب خط $۲y=-x+۱۱$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ است، پس شیب خط عمود بر آن برابر $m=۲$ خواهد بود در نتیجه معادلهٔ خط مطلوب به صورت زیر است:

$$y-۲=۲(x+۳)\Rightarrow y=۲x+۸$$

با امتحان گزینه‌ها مشخص می‌شود که خط فوق از نقطهٔ $(۱,۱۰)$ می‌گذرد.

### نوشتن معادله خط در ۴ حالت

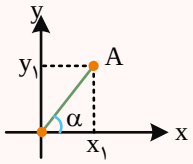
با داشتن شیب خط و مختصات یک نقطه از خط مانند $A(x_1, y_1)$ : در این حالت معادله خط را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

با داشتن مختصات دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از خط: در این حالت معادله خط را به صورت زیر می‌نویسیم:

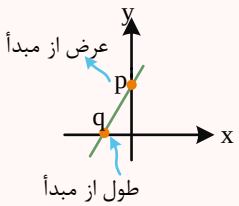
$$y - y_1 = (\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})(x - x_1)$$

با داشتن زاویه بین خط و جهت مثبت محور xها و مختصات یک نقطه از خط مانند $A(x_1, y_1)$ : بدون شرح!




$$y - y_1 = (\tan\alpha)(x - x_1)$$

با داشتن عرض از مبدأ و طول از مبدأ: معادلهٔ خط را به صورت زیر می‌نویسیم:




$$\frac{y}{p} + \frac{x}{q} = 1$$

گروه آموزشی ماز

**۸- دو نقطه روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم قرار دارند که فاصلهٔ آن‌ها از خط $3y = 2x + 12$ برابر $\sqrt{13}$ است. حاصل جمع طول‌های این دو نقطه کدام است؟**

۱) ۱ ۲) $-1$ ۳) $-\frac{24}{5}$ ۴) $\frac{24}{5}$

**پاسخ: گزینه ۳** (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

معادلهٔ خط نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم به صورت $y = -x$ است، پس مختصات نقاطی که روی این خط قرار دارند به صورت $C(\alpha, -\alpha)$ است. فاصلهٔ C را از خط $2x - 3y + 12 = 0$ به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow d = \frac{|2\alpha + 3\alpha + 12|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|5\alpha + 12|}{\sqrt{13}}$$

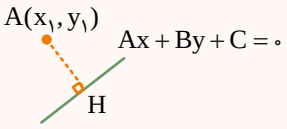
$$\Rightarrow \frac{|5\alpha + 12|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Rightarrow |5\alpha + 12| = 13 \Rightarrow 5\alpha + 12 = \pm 13 \Rightarrow \begin{cases} 5\alpha + 12 = 13 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow A(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}) \\ 5\alpha + 12 = -13 \Rightarrow \alpha = -5 \Rightarrow B(-5, 5) \end{cases}$$

$$\text{مجموع طول‌های نقاط مطلوب} = -5 + \frac{1}{5} = -\frac{24}{5}$$

### فاصلهٔ نقطه از خط

فاصلهٔ نقطه از خط، طول کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که نقطه را به خط وصل می‌کند، که این کوتاه‌ترین پاره‌خط، همان خط عمودی است که از نقطه به خط وارد می‌شود.

برای پیدا کردن فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ از خط $Ax + By + C = 0$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:




$$AH = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

گروه آموزشی ماز

۹- قاعده کوچک یک ذوزنقه به طول $۲-\sqrt{۱۲}$ روی خط $y=\sqrt{۳}x+۲$ و قاعدهٔ بزرگ آن به طول $\sqrt{۲۷}-۳$ روی خط $my-۳x+۶=۰$ قرار دارد. مساحت این ذوزنقه کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) $۱۰\sqrt{۳}$ ۴) ۵

**پاسخ: گزینه ۴** (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

چون در ذوزنقه، قاعده‌ها با هم موازیند، پس داریم:

$$\begin{matrix} y=\sqrt{۳}x+۲ \\ my=۳x-۶ \end{matrix}$$ شرط موازی بودن : $\frac{۱}{m}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow m=\sqrt{۳}$

بنابراین معادلهٔ دو خط موازی به صورت $\sqrt{۳}x-y+۲=۰$ و $\sqrt{۳}y-۳x+۶=۰$ خواهد بود که فاصلهٔ دو خط موازی برابر طول ارتفاع ذوزنقه است، یعنی داریم:

$$\begin{cases} \sqrt{۳}x-y+۲=۰ \\ \sqrt{۳}x-y-۲\sqrt{۳}=۰ \end{cases}$$

توجه شود که ضرایب $x$ و $y$ را در دو معادله، برابر کرده‌ایم تا از فرمول فاصلهٔ دو خط موازی استفاده کنیم:

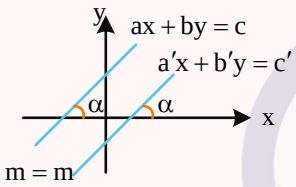
$$d=\frac{|۲+۲\sqrt{۳}|}{\sqrt{۳+۱}}=\frac{۲+۲\sqrt{۳}}{۲}=۱+\sqrt{۳}$$

پس طول ارتفاع ذوزنقه $h=۱+\sqrt{۳}$ است.

مساحت ذوزنقه $S=\frac{(\sqrt{۱۲}-۲+\sqrt{۲۷}-۳)\times(۱+\sqrt{۳})}{۲}=\frac{(۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۳}-۵)(۱+\sqrt{۳})}{۲}=\frac{۵(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}+۱)}{۲}=\frac{۵\times۲}{۲}=۵$

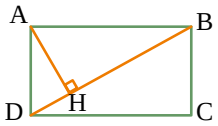
**دو خط موازی:**

دو خط در صورتی موازی‌اند که دارای شیب‌های برابر باشند، به عبارتی: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$




گروه آموزشی ماز

۱۰- در مستطیل شکل مقابل $AB=۸\sqrt{۳}$ و $BC=۸$ است. فاصلهٔ نقطهٔ H از ضلع AB کدام است؟




۱) ۲
۲) ۸
۳) ۶
۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۳** (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

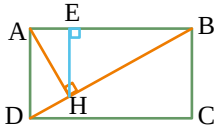
در مثلث قائم‌الزاویه ABD طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$BD^۲=AB^۲+AD^۲\Rightarrow BD^۲=۱۹۲+۶۴\Rightarrow BD^۲=۲۵۶\Rightarrow BD=۱۶$$

همچنین در مثلث ABD داریم:

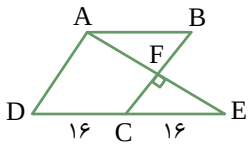
$$AB^۲=BD.BH\Rightarrow ۱۹۲=۱۶\times BH\Rightarrow BH=۱۲$$

حال اگر از نقطهٔ H عمود HE را بر ضلع AB رسم کنیم داریم:




$$EH\parallel AD\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{HE}{AD}=\frac{BH}{BD}\Rightarrow\frac{HE}{۸}=\frac{۱۲}{۱۶}\Rightarrow HE=۶$$

۱۱- در شکل مقابل، $\hat{F}=۹۰^\circ$ و چهارضلعی ABCD لوزی است. مساحت مثلث ABF کدام است؟




۱) $۱۶\sqrt{۲}$
۲) $۳۲\sqrt{۲}$
۳) $۱۶\sqrt{۳}$
۴) $۳۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

چون تمام اضلاع لوزی با هم برابرند، پس:

$AD=AB=BC=۱۶$

از طرفی چون در مثلث ADE داریم: $FC \parallel AD$، پس با تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{FC}{AD}=\frac{EC}{ED}\Rightarrow\frac{FC}{۱۶}=\frac{۱۶}{۳۲}\Rightarrow FC=۸$$
$$\Rightarrow BF=۱۶-۸=۸$$

حال بنا به قضیه فیثاغورس در مثلث ABF داریم:

$$AB^۲=AF^۲+FB^۲\Rightarrow ۲۵۶=AF^۲+۶۴\Rightarrow AF^۲=۱۹۲\Rightarrow AF=۸\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABF}}=\frac{۱}{۲}AF\times BF=\frac{۱}{۲}\times۸\sqrt{۳}\times۸\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABF}}=۳۲\sqrt{۳}$$

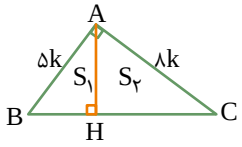
گروه آموزشی ماز

۱۲- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای نسبت اضلاع قائم ۵ به ۸ است. اگر ارتفاع وارد بر وتر را در این مثلث رسم کنیم، مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث متوسط است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$
۲) $\frac{۱۳}{۸}$
۳) $\frac{۸۹}{۶۴}$
۴) $\frac{۶۴}{۲۵}$

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

می‌دانیم با رسم ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه، سه مثلث متشابه وجود می‌آید، بنابراین داریم:




$$\overset{\triangle}{ABH}\sim\overset{\triangle}{ACH}\Rightarrow\frac{S_۱}{S_۲}=(\frac{۵k}{۸k})^۲=\frac{۲۵}{۶۴}$$
$$\Rightarrow\frac{S_۱+S_۲}{S_۲}=\frac{۲۵+۶۴}{۶۴}=\frac{۸۹}{۶۴}$$

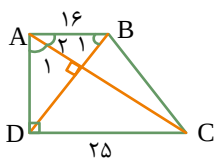
گروه آموزشی ماز

۱۳- در یک ذوزنقه قائم‌الزاویه، اندازهٔ قاعده‌ها برابر ۱۶ و ۲۵ است و قطرهای آن بر هم عمود هستند. مساحت مثلثی که اضلاع آن، ساق قائم و قاعدهٔ بزرگ و قطر ذوزنقه است، کدام است؟

۱) ۲۲۵
۲) ۲۰۰
۳) ۲۷۵
۴) ۲۵۰

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

$$\begin{cases}\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ\\ \hat{B}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\hat{A}_۱=\hat{B}_۱$$




$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{B}_۱\\ \hat{A}=\hat{D}=۹۰^\circ\end{cases}\xrightarrow{\text{به حالت دو زاویه مساوی}}\overset{\triangle}{ABD}\sim\overset{\triangle}{ACD}$$

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{DC}=\frac{BD}{AC}\Rightarrow AD^۲=AB\times DC\Rightarrow AD=۲۰$$
$$S_{\overset{\triangle}{ADC}}=\frac{AD\times DC}{۲}=\frac{۲۰\times۲۵}{۲}=۲۵۰$$

گروه آموزشی ماز

۱- چند عدد سه رقمی مضرب ۵ با ارقام متمایز وجود دارد؟

۱) ۱۶۲ ۲) ۱۵۶ ۳) ۱۳۶ ۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۶)

اگر یکان عدد ۰ باشد:

$$\frac{\text{۸ حالت}}{\text{به جز یکان و دهگان}} \times \frac{\text{۹ حالت}}{\text{به جز یکان}} \times \frac{۱}{۰} = ۷۲$$

اگر یکان عدد ۵ باشد:

$$\frac{\text{۸ حالت}}{\text{به جز ۰ و یکان}} \times \frac{\text{۸ حالت}}{\text{به جز یکان و صدگان}} \times \frac{۱}{۵} = ۶۴$$

بنابراین تعداد این اعداد برابر است با: $۷۲+۶۴=۱۳۶$

گروه آموزشی ماز

۲- مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,...,۱۴\}$ چند زیرمجموعه حداقل با دو عضو دارد که اختلاف بزرگ‌ترین عضو و کوچک‌ترین عضو آن برابر ۱۰ است؟

۱) $۲^{۱۰}$ ۲) $۲^{۱۱}$ ۳) $۵\times۲^{۹}$ ۴) $۵\times۲^{۸}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۶)

حالت‌های ممکن به صورت زیر هستند که کوچک‌ترین عضو و بزرگ‌ترین عضو را مشخص کرده‌ایم و اعضا را به ترتیب صعودی در نظر گرفته‌ایم.

$A_۱=\{۴,—,—,—,—,—,—,—,—,۱۴\}$

$A_۲=\{۳,—,—,—,—,—,—,—,—,۱۳\}$

$A_۳=\{۲,—,—,—,—,—,—,—,—,۱۲\}$

$A_۴=\{۱,—,—,—,—,—,—,—,—,۱۱\}$

در هر مورد، ۹ عضو می‌تواند بین کوچک‌ترین عضو و بزرگ‌ترین عضو قرار بگیرد. هر کدام از این عضوها می‌توانند در مجموعهٔ موردنظر بیایند یا نه. پس هر عضو دو حالت و در کل $۲^{۹}$ حالت وجود دارد، پس هر کدام از مجموعه‌های $A_۱$ تا $A_۴$ می‌توانند به $۲^{۹}$ حالت تشکیل شوند و در کل $۴\times۲^{۹}=۲^{۱۱}$ مجموعه با ویژگی موردنظر وجود دارد.

گروه آموزشی ماز

۳- دامنهٔ تابع f مجموعهٔ $\{۲,۳,۴\}$ و برد آن زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,...,۲۰\}$ است و برای هر x از دامنهٔ f نابرابری $f(x)>x^{۲}$ برقرار است. چند تابع با این شرایط وجود دارد؟

۱) ۷۰۴ ۲) ۷۴۰ ۳) ۸۲۰ ۴) ۸۲۴

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۶)

این تابع به صورت $f=\{(۲,a),(۳,b),(۴,c)\}$ است که در آن:

$a>۴ \Rightarrow a\in\{۵,۶,...,۲۰\}$

$b>۹ \Rightarrow b\in\{۱۰,۱۱,...,۲۰\}$

$c>۱۶ \Rightarrow c\in\{۱۷,۱۸,۱۹,۲۰\}$

بنابراین a می‌تواند ۱۶ حالت، b می‌تواند ۱۱ حالت و c می‌تواند ۴ حالت داشته باشد.

پس تعداد توابع موردنظر برابر است با: $۱۶\times۱۱\times۴=۷۰۴$

۴- ۴ دانش‌آموز کلاس اول و ۶ دانش‌آموز کلاس سوم در یک صف کنار هم ایستاده‌اند. در چند حالت هیچ دو دانش‌آموز کلاس اول کنار هم نیستند؟

۱) $۶۰\times۷!$ ۲) $۱۲۰\times۷!$ ۳) $۱۲۰\times۶!$ ۴) $۶۰\times۶!$

**پاسخ: گزینه ۲** (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۷)

ابتدا کلاس سومی‌ها را می‌نشانیم و جواب $۶!$ است. سپس ۴ کلاس اولی را در بین آن‌ها جا می‌دهیم و داریم:

$$۶!\times۷\times۶\times۵\times۴=۱۲۰\times۷!$$

گروه آموزشی ماز

۵- چند عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۳ وجود دارد که رقم‌های آن عضو مجموعهٔ $\{۲,۴,۶,۷\}$ باشند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

**پاسخ: گزینه ۴** (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۶)

اگر رقم‌های عدد موردنظر متمایز باشند، باید یکی از گروه‌های زیر باشند:

$$\{۲,۴,۶\}\ ,\ \{۲,۶,۷\}$$

با هر کدام از گروه‌ها، $۳!$ عدد سه رقمی می‌توان نوشت که مجموعاً ۱۲ عدد می‌شود.

اگر عدد موردنظر دو رقم یکسان داشته باشد باید رقم‌ها یکی از گروه‌های زیر باشند:

$$\{۴,۴,۷\}\ ,\ \{۴,۷,۷\}$$

با رقم‌های هر گروه ۳ عدد سه رقمی می‌توان نوشت که مجموعاً ۶ عدد می‌شود.

اگر عدد موردنظر سه رقم یکسان داشته باشد حتماً بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود که تعداد این اعداد ۴ تاست.

بنابراین تعداد عددهای موردنظر برابر است با: $۱۲+۶+۴=۲۲$

گروه آموزشی ماز

۶- در چند جایگشت از حروف $F, E, D, C, B, A$ حروف $A$ , $B$ کنار یکدیگر و قبل از حرف $F$ قرار دارند؟

۱) ۲۴ ۲) ۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۸۰

**پاسخ: گزینه ۳** (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۶)

تعداد جایگشت‌هایی که حرف $A$ و $B$ کنار یکدیگر قرار دارند برابر $۲\times۵!$ است. در نیمی از این جایگشت‌ها بستهٔ $A$ و $B$ قبل از $F$ قرار دارد و در نیمی دیگر بعد از آن قرار دارد، بنابراین تعداد جایگشت‌های موردنظر برابر $۵!$ است.

گروه آموزشی ماز

۷- به چند طریق می‌توان سه عدد از اعداد مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,...,۹\}$ را انتخاب و با هم جمع کنیم، طوری که حاصل عددی فرد شود؟

۱) ۱۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

**پاسخ: گزینه ۳** (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۶)

به دو روش می‌توان این را انجام داد.

**روش اول:** سه عدد فرد از بین اعداد $\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ انتخاب کنیم که تعداد انتخاب‌ها برابر $\binom{۵}{۳}$ است.

**روش دوم:** دو عدد زوج از بین اعداد $\{۲,۴,۶,۸\}$ و یک عدد فرد از اعداد $\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ انتخاب کنیم که تعداد انتخاب‌ها برابر $\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}$ است، بنابراین تعداد کل انتخاب‌ها برابر است با:

$$\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}=۱۰+۳۰=۴۰$$

۸- مجموعهٔ $\{1,2,3,...,2n\}$ دارای ۱۲۰ زیرمجموعهٔ سه عضوی است، این مجموعه چند زیر مجموعهٔ چهارعضوی دارد؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۴۰

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۶)

تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی یک مجموعهٔ $2n$ عضوی برابر $\binom{2n}{3}$ است، پس:

$$\frac{(2n)!}{(2n-3)!3!}=120 \Rightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}=120$$

$$\Rightarrow 4n^3-6n^2+2n-360=0 \Rightarrow 2n^3-3n^2+n-180=0$$

$$\Rightarrow 2n^3-10n^2+7n^2+n-180=0 \Rightarrow 2n^2(n-5)+(7n+36)(n-5)=0$$

$$\Rightarrow (n-5)(\underbrace{2n^2+7n+36}_{\Delta<0})=0 \Rightarrow n=5$$

بنابراین مجموعهٔ موردنظر ۱۰ عضوی است و تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی آن برابر است با:

$$\binom{10}{4}=\frac{10!}{4!6!}=\frac{10\times 9\times \cancel{8}\times 7}{\cancel{4}\times 3\times \cancel{2}}=210$$

**ترکیب**

تعداد حالات انتخاب $r$ شیء از $n$ شیء متمایز برابر است با:

$$\binom{n}{r}=C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

توجه کنید که ترتیب انتخاب اشیاء مهم نمی‌باشد.

**توجه:**

به خاطر سپردن موارد زیر در محاسبه، مفید است.

$$\begin{cases}\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1,\ \binom{n}{r}=\binom{n}{n-r},\ \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}\\ \binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!=6},\ \underbrace{\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}=\binom{n}{r}}_{\text{رابطهٔ پاسکال}}\end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۹- اگر $P(n,4)=36C(n-1,4)$ مقدار $n$ چه عددی است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۲ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۶)

$$\begin{cases}P(n,4)=\frac{n!}{(n-4)!}\\ C(n-1,4)=\frac{(n-1)!}{(n-5)!4!}\end{cases} \Rightarrow \frac{n!}{(n-4)!}=36\times\frac{(n-1)!}{4!(n-5)!} \Rightarrow \frac{n}{n-4}=\frac{36}{24}=\frac{3}{2}$$

$$2n=3n-12 \Rightarrow n=12$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- به چند طریق می‌توان ۶ لنگه کفش را از بین ۸ جفت کفش انتخاب کرد طوری که فقط دو جفت کفش بین آن‌ها باشد؟

۱) ۱۶۸۰ ۲) ۲۶۸۸ ۳) ۳۶۹۳ ۴) ۷۳۹۲

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۶)

ابتدا دو جفت کفش را از بین ۸ جفت کفش انتخاب می‌کنیم، این کار به $\binom{8}{2}$ حالت امکان‌پذیر است.

اکنون دو جفت کفش را از بین ۶ جفت کفش باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم و از هر کدام از جفت‌های انتخاب شده یک لنگه را انتخاب می‌کنیم. این کار به $\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{6}{2}$ حالت امکان‌پذیر است.

بنابراین تعداد راه‌های انتخاب موردنظر برابر است با:

$$\binom{۸}{۲}\binom{۶}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}=۲۸\times۱۵\times۲\times۲=۱۶۸۰$$

گروه آموزشی ماز

**۱۱- از کیسه‌ای که شامل ۳ مهرهٔ قرمز، ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ آبی است. دو مهره به تصادف بیرون می‌آوریم. به چه احتمالی مهره‌ها همرنگ هستند؟**

۱) $\frac{۱۷}{۶۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱۰}{۳۳}$ ۴) $\frac{۱۹}{۶۶}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۷)

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر تعداد حالت‌های انتخاب ۲ شیء از ۱۲ شیء است که برابر است با: $\binom{۱۲}{۲}$.

تعداد اعضای پیشامد همرنگ بودن مهره‌ها برابر است با:

$$\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{هر دو قرمز}}+\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{هر دو سفید}}+\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{هر دو آبی}}$$

بنابراین احتمال موردنظر برابر است با:

$$\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۲}{۲}}=\frac{۳+۶+۱۰}{۶۶}=\frac{۱۹}{۶۶}$$

گروه آموزشی ماز

**۱۲- یک تاس را هشت بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد سومین باری که ۶ ظاهر می‌شود، در پرتاب پنجم باشد؟**

۱) $\frac{۲۵}{۱۲۹۶}$ ۲) $\frac{۱۲۵}{۳۸۸۸}$ ۳) $\frac{۵}{۱۰۸}$ ۴) $\frac{۱۲۵}{۱۹۴۴}$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۷)

تعداد کل حالت‌های ممکن $۶^۸$ است.

اگر بخواهیم برای بار سوم در پرتاب پنجم ۶ ظاهر شود، باید فقط دو پرتاب از پرتاب‌های اول تا چهارم ۶ آمده باشند. در پرتاب‌های ششم تا هشتم هر عددی از ۱ تا ۶ می‌تواند ظاهر شود. بنابراین تعداد حالت‌های رخ دادن پیشامد موردنظر برابر است با:

پرتاب پنجم

$$\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{دو پرتاب ۶ آمده}}\times ۱\times ۱\times \underbrace{۵\times۵}_{\text{دو پرتاب غیر ۶ آمده}}\times ۱\times \underbrace{۶\times۶\times۶}_{\text{پرتاب‌های ششم تا هشتم}}=\binom{۴}{۲}\times۵^۲\times۶^۳$$

بنابراین احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با:

$$\frac{\binom{۴}{۲}\times۵^۲\times۶^۳}{۶^۸}=\frac{۶\times۲۵}{۶^۵}=\frac{۲۵}{۱۲۹۶}$$

گروه آموزشی ماز

**۱۳- اگر $P(A)=\frac{۱}{۳}$، $P(A|B)=\frac{۲}{۳}$ و $P(B|A)=\frac{۱}{۲}$، مقدار $P(B-A)$ کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۳}{۱۵}$

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۷)

توجه کنید که:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{\frac{۱}{۶}}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین: $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۲}$

**احتمال شرطی**

فرض کنیم A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، در این صورت، احتمال وقوع A به شرط این که B رخ داده باشد را با نماد $P(A|B)$ نشان داده و از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ ,\ P(B)\neq ۰$$

گروه آموزشی ماز

**۱۴- احتمال قبولی فردی در امتحان ادبیات $\frac{۱}{۴}$ و در امتحان ریاضی $\frac{۱}{۶}$ است. اگر او در امتحان ادبیات قبول نشود، احتمال قبولی او در ریاضی $\frac{۱}{۸}$ می‌شود. چقدر احتمال دارد که او حداقل در یکی از دو امتحان قبول شود؟**

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۷}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱۳}{۳۲}$

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۷)

اگر پیشامد قبولی فرد در امتحان ادبیات را با A و پیشامد قبولی او در ریاضی را با B نشان دهیم، می‌توان نوشت:

$$P(A)=\frac{۱}{۴}\ ,\ P(B)=\frac{۱}{۶}\ ,\ P(B|A')=\frac{۱}{۸}$$

بنابراین: $P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{P(B\cap A')}{۱-P(A)}\Rightarrow\frac{۱}{۸}=\frac{P(B\cap A')}{۱-\frac{۱}{۴}}$

$$\Rightarrow P(B\cap A')=\frac{۳}{۳۲}\Rightarrow P(B-A)=\frac{۳}{۳۲}$$

$$P(A\cap B)=P(B)-P(B-A)=\frac{۱}{۶}-\frac{۳}{۳۲}=\frac{۷}{۹۶}$$

در نتیجه احتمال این که این فرد حداقل در یکی از دو امتحان قبول شود برابر است با:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}-\frac{۷}{۹۶}=\frac{۱۱}{۳۲}$$

گروه آموزشی ماز

**۱۵- اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند و $۳P(A)+۶P(B)=۴$، حداقل مقدار ممکن $P(A\cup B)$ کدام است؟**

۱) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۲۳}{۳۶}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴۷}{۷۲}$

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۷)

اگر فرض کنیم $P(B)=x$، آن‌گاه: $۳P(A)+۶x=۴\Rightarrow P(A)=-۲x+\frac{۴}{۳}$

در این صورت: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=-۲x+\frac{۴}{۳}+x-x(-۲x+\frac{۴}{۳})=۲x^{۲}-\frac{۷}{۳}x+\frac{۴}{۳}$

بنابراین کمترین مقدار $P(A\cup B)$ به ازای $x=-\frac{-\frac{۷}{۳}}{۲\times ۲}=\frac{۷}{۱۲}$ به دست می‌آید و برابر است با: $۲(\frac{۷}{۱۲})^{۲}-\frac{۷}{۳}(\frac{۷}{۱۲})+\frac{۴}{۳}=\frac{۴۷}{۷۲}$

توجه کنید که در این صورت $P(B)=\frac{۷}{۱۲}$ و $P(A)=\frac{۱}{۶}$.

گروه آموزشی ماز

**۱۶- احتمال ابتلای مردان یک جامعه به نوعی بیماری خاص ۴۰٪ و احتمال ابتلای زنان آن جامعه ۳۰٪ است، اگر ۶۰٪ جمعیت آن جامعه را مردان و بقیه را زنان تشکیل داده باشند و یک فرد از این جامعه انتخاب کنیم، به چه احتمالی به بیماری مبتلا می‌شود؟**

۱) ٪۳۴ ۲) ٪۳۶ ۳) ٪۴۸ ۴) ٪۵۶

**پاسخ: گزینه ۲** (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۷)

بنابر قانون احتمال کل، احتمال پیشامد موردنظر برابر است با:

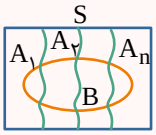
$$\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۶۰}{۱۰۰}+\frac{۳۰}{۱۰۰}\times\frac{۴۰}{۱۰۰}=\frac{۳۶}{۱۰۰}$$

### قانون احتمال کل

فرض کنید $A_۱, A_۲, ..., A_n$ پیشامدهایی باشند که فضای نمونه‌ای S را افراز می‌کنند، با این شرایط برای هر پیشامد دلخواه B داریم:

$$P(B)=P(A_۱)P(B|A_۱)+...+P(A_n)P(B|A_n)$$

البته در مسائل احتمال کل (مسائلی که چند تصادف پشت سر هم رخ داده‌اند) بهتر است مسئله را با نمودار درختی حل کنیم و استفاده از فرمول توصیه نمی‌شود، به این صورت که احتمال‌ها را در شاخه‌های متوالی در هم ضرب کردن و سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

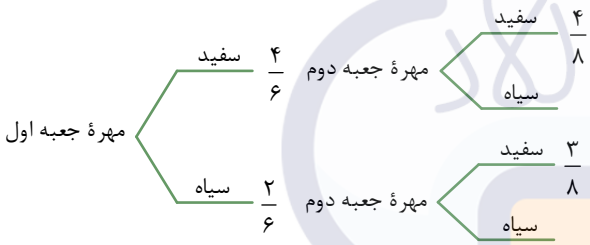



گروه آموزشی ماز

**۱۷- دو جعبه داریم. در جعبه اول ۴ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ دوم ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه وجود دارد. یک مهره از جعبهٔ اول به تصادف برمی‌داریم و در جعبه دوم می‌اندازیم. سپس یک مهره از جعبهٔ دوم به تصادف بیرون می‌آوریم. به چه احتمالی این مهره سفید است؟**

۱) $\frac{۱۵}{۴۸}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۴}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱۳}{۴۸}$

**پاسخ: گزینه ۲** (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۷)




با توجه به نمودار درختی بالا و طبق قانون احتمال کل، احتمال پیشامد موردنظر برابر است با:

$$\frac{۴}{۶}\times\frac{۴}{۸}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۱۱}{۲۴}$$

گروه آموزشی ماز

**۱۸- میانگین و میانهٔ داده‌های $۲۳,۳۰,۲۶,۱۰,۳۷,۲۵,۲۴,x$ با هم برابرند. مقدار x کدام است؟**

۱) ۲۳ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶

**پاسخ: گزینه ۳** (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۷)

داده‌ها را بدون در نظر گرفتن x مرتب می‌کنیم:

$$۱۰,۲۳,۲۴,۲۵,۲۶,۳۰,۳۷$$

میانهٔ داده‌های بالا برابر ۲۵ است و میانگین آن‌ها هم ۲۵ است:

$$\frac{۱۰+۲۳+۲۴+۲۵+۲۶+۳۰+۳۷}{۷}=\frac{۱۷۵}{۷}=۲۵$$

بنابراین اگر $x=۲۵$، میانه و میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند.

### میانگین و میانه رو چطور پیدا کنیم؟

**میانگین ($\bar{x}$)**: اگر مجموع تمام داده‌ها را به تعدادشان تقسیم کنیم، میانگین به دست می‌آید.

$$\bar{x}=\frac{x_۱+x_۲+...+x_n}{n}$$

(به میانگین مرکز ثقل هم گفته می‌شود)

**میانه ($Q_2$):** ابتدا تمام داده‌ها را به ترتیب صعودی یا نزولی مرتب می‌کنیم:

اگر تعداد داده‌ها فرد بود $\Leftarrow$ دادهٔ وسط $= Q_2 =$ میانه

اگر تعداد داده‌ها زوج بود $\Leftarrow$ میانگین دو دادهٔ وسط $= Q_2 =$ میانه

گروه آموزشی ماز

**۱۹- واریانس ۴ دادهٔ آماری برابر صفر است. اگر داده‌های ۱۰,۸,۴,۲ را به آن‌ها اضافه کنیم، میانگین تمام داده‌ها برابر ۵ می‌شود، واریانس تمام داده‌ها کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

**پاسخ: گزینه ۳** (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۷)

چون واریانس ۴ داده برابر صفر است، پس این چهار داده با هم برابرند. فرض کنیم این داده‌ها برابر a باشند، در این صورت:

$$\frac{۴a+۱۰+۸+۴+۲}{۸}=۵ \Rightarrow \frac{a+۶}{۲}=۵ \Rightarrow a+۶=۱۰ \Rightarrow a=۴$$

بنابراین واریانس داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^۲=\frac{۱}{۸}\left((۱۰-۵)^۲+(۸-۵)^۲+۵(۴-۵)^۲+(۲-۵)^۲\right)=\frac{۱}{۸}(۲۵+۹+۵+۹)=\frac{۴۸}{۸}=۶$$

**آنچه درباره واریانس و انحراف معیار باید بدانید!**

**واریانس ($\sigma^۲$):**

$$\sigma^۲=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\ldots+(x_n-\bar{x})^۲}{n}$$

و یا

$$\sigma^۲=\frac{x_۱^۲+x_۲^۲+\ldots+x_n^۲}{n}-(\bar{x})^۲$$

**انحراف معیار ($\sigma$):** جذر واریانس است. $\sigma=\sqrt{\sigma^۲}$

اگر هر یک از مقادیر CV، $\sigma$ و $\sigma^۲$ صفر باشد یعنی همه آن‌ها صفر هستند و این یعنی تمام داده‌ها با هم برابرند.

گروه آموزشی ماز

**۲۰- ضریب تغییرات داده‌های ۲,۵,۹,۴m برابر $\frac{\sqrt{۷۰}}{۱۴}$ است. مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟**

۱) $\frac{۱۳۸}{۳۵}$ ۲) $\frac{۸۱}{۳۵}$ ۳) $\frac{۸۱}{۳۷}$ ۴) $\frac{۱۵۲}{۳۷}$

**پاسخ: گزینه ۴** (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۷)

توجه کنید که:

$$\bar{x}=\frac{۲+۵+۹+۴m}{۴}=۴+m$$

$$\sigma^۲=\frac{(۲-۴-m)^۲+(۵-۴-m)^۲+(۹-۴-m)^۲+(۴m-۴-m)^۲}{۴}$$

$$\sigma^۲=\frac{۱}{۴}(m^۲+۴m+۴+m^۲-۲m+۱+۲۵-۱۰m+m^۲+۹m^۲+۱۶-۲۴m)=\frac{۱}{۴}(۱۲m^۲-۳۲m+۴۶)=۳m^۲-۸m+\frac{۲۳}{۲}$$

بنابراین:

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۷۰}}{۱۴}=\frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow ۷۰\bar{x}^۲=۱۹۶\sigma^۲$$

$$\frac{۷۰}{۳۵}(m+۴)^۲=\frac{۱۹۶}{۹۸}(۳m^۲-۸m+\frac{۲۳}{۲})$$

$$\Rightarrow ۳۵m^۲+۳۵\times۸m+۳۵\times۱۶=۳\times۹۸m^۲-۸\times۹۸m+۴۹\times۲۳$$

$$\Rightarrow ۷(۴۲-۵)m^۲-۸(۹۸+۳۵)m+۴۹\times۲۳-۳۵\times۱۶=۰$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای m برابر $\frac{۸\times\cancel{۱۳۳}^{۱۹}}{\cancel{۷}\times۳۷}=\frac{۱۵۲}{۳۷}$ است.

سنجش کلاد